Feuille de TD n° 4

Dimension, Matrices

5 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \text{vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (2,1,1)$.
2. $F_2 = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (2,0,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$.
3. $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$.
4. $F_4 = \text{vect}(x_1, x_2, x_3)$ où $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (1,-1,1,-1)$ et $x_3 = (1,0,1,1)$.
5. $F_5 = \text{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ où $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,0)$, $x_3 = (2,0,1,1)$ et $x_4 = (0,2,-1,1)$.

Quelle est la dimension de $F_1 + F_2$ et de $F_1 \cap F_2$?

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(u^k\right)_{0 \le k \le n}$ une famille de suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : pour tout $0 \le k \le n$,

$$(u^k)_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall p > k,\ (u^k)_p = 0.$$

Montrer que la famille $\left(u^k\right)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim E = n$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 4. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère :

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de E.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.
Pour a, $b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a\cos(x + b)$. Soit $E = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 7. Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $e = (1,1,1,1)$.

1. Donner une base du sous-espace vectoriel H et sa dimension.
2. Montrer que H et $\text{vect}(e)$ sont supplémentaires.
3. Si $a \in \mathbb{K}^4 \setminus H$, montrer que H et $\text{vect}(a)$ sont encore supplémentaires.

Exercice 8. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 9. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
• En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 10. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$. (on dit que N est **nilpotente**)
• Montrer que N n'est pas inversible.
• Montrer que $I_n - M$ est inversible.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_3$.

• Calculer B^n pour tout $n \geq 0$.
• En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 0$.

Indications

Exercice 9 On cherche une matrice B telle que $AB = I_3$ et $BA = I_3$.

Exercice 10. 2) On pourra utiliser une formule d'arithmétique pour faire apparaître la quantité N^m.