Feuille de TD n° 5

Systèmes linéaires, Espaces affines / vectoriels

15 octobre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.
- Les matrices M suivantes sont-elles échelonnées ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

$E = \mathrm{Diag}\,(1, \dots, n)$

- Pour chaque matrice M échelonnée, résoudre le système linéaire $MX = Y$, en fonction du vecteur colonne Y.

Exercice 2. Echelonner les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
On considère les systèmes linéaires :

$$(S)\ AX = Y,$$

$$(S')\ AX = 0.$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (S') forme un sous-ev de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
2. Exprimer l'ensemble des solutions de (S) en fonction de l'ensemble des solutions de (S').
   Montrer que cet ensemble est soit vide, soit réduit à un seul vecteur, soit possède une infinité de solutions.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \pi \\ -3\pi + e \end{pmatrix}$.
   Résoudre le système $AX = Y$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Pour $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, résoudre l'équation $AX = Y$.

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces affines de l'espace vectoriel E ? Si oui, donner leur direction et leur dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_1 = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0\}$;
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_2 = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 4\}$;
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_3 = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y \neq 0\}$;
4. $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{F}_4 = \{u \in E \mid u_1 + u_2 = 2\}$.

Exercice 6.
Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F_1 et F_2. On suppose que $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_1$, c'est-à-dire que $F_1 \subset F_2$. Démontrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Exercice 7.
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 8. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note

$$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_p + a).$$

1. Montrer que
$$F_a \oplus G = E.$$
2. Soient $a, b \in G$. Montrer
$$a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b.$$