Feuille de TD n° 6

Applications, Méthode du Pivot, Systèmes linéaires

20 octobre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.
Démontrer que la relation $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par la relation f, tout élément de $\mathbb{R}$ possède une et une seule image. Vérifions que cette image appartient à $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x^2+1 > x^2$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. Donc $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x|$.

Or $|x| = \max(x, -x) \geq -x$. Donc $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \geq 0$, soit $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

Exercice 2.

1. Soient f et g des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$
Justifier que les applications f et g sont bien définies puis calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$?
2. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Soit A une partie de E. Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

---

1. Tout élément de $\mathbb{N}$ possède une unique image par f qui est dans $\mathbb{N}$. Tout élément de $\mathbb{N}$ possède une unique image par g qui est dans $\mathbb{N}$. Les applications f et g sont donc bien définies.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n)$ et comme $2n$ est pair, $g(2n) = \frac{2n}{2} = n$. Donc $g \circ f(n) = n$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Pour calculer $f \circ g$, distinguons les cas. Si n est pair, alors $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n}{2}\right) = 2 \times \dfrac{n}{2} = n$. Si n est impair, alors $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(0) = 2 \times 0 = 0$.
En particulier, $(g \circ f)(1) = 1$ et $(f \circ g)(1) = 0$, et on en déduit donc que $g \circ f \neq f \circ g$.
2. $\triangleright$ Soit $y \in (g \circ f)(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. Donc $y = g(z)$, avec $z = f(x) \in f(A)$. Donc $y \in g(f(A))$.
$\triangleleft$ Réciproquement, soit $y \in g(f(A))$. Par définition, il existe $z \in f(A)$ tel que $y = g(z)$. Comme $z \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $z = f(x)$. Donc $y = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)(A)$.

Exercice 3. Déterminer l'image directe $f(I)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\exp(x)$ et $I = \mathbb{R}_-$,
2. $f(x) = x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \mathbb{R}_+^*$,
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ et $I =]0, 1]$,
4. $f(z) = z^2$ et $I = \mathbb{C}$,
5. $f(x) = x + \mathrm{E}(x)$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x et $I = \mathbb{R}_+$,
6. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$ et $I = \mathbb{R}^2$.

Pour les deux premières questions, faire un tableau de variations.

1. $f(I) = \mathbb{R}_-$.
2. $f(I) = \left[-\dfrac{1}{ne}, +\infty\right[$.
3. Posons $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{\pi}{x}$. On a $g(]0, 1]) = [\pi, +\infty[$.
On a donc $f(I) = (\sin \circ g)(I) = \sin(g(]0, 1])) = \sin([\pi, +\infty[) = [-1, 1]$.
4. $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
On a bien sûr $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$. Posons $z_0 = \frac{r}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$. Alors $z = z_0^2 = f(z_0)$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.
5. Montrons que $f(\mathbb{R}_+) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1[$. Procédons par double inclusion.
$\triangleright$ Soit $y \in f(\mathbb{R}_+)$. Alors $\mathrm{E}(y) \leq y < \mathrm{E}(y) + 1$, donc $2\mathrm{E}(y) \leq y + \mathrm{E}(y) < 2\mathrm{E}(y) + 1$. Comme $\mathrm{E}(y) \in \mathbb{N}$, on a $f(y) = y + \mathrm{E}(y) \in [2\mathrm{E}(y), 2\mathrm{E}(y) + 1[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1[$.

$\triangleleft$ Réciproquement, soit $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2n, 2n+1[$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [2n_0, 2n_0+1[$.
Posons $x = y - n_0$. Comme $y \geq 2n_0 \geq n_0$, $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $y = f(x)$.
On a $2n_0 \leq y < 2n_0 + 1$, donc $n_0 \leq y - n_0 < n_0 + 1$, soit $n_0 \leq x < n_0 + 1$. Donc $n_0 = \mathrm{E}(x)$ et donc $y = f(x) \in f(\mathbb{R}_+)$.

6. Soit $(s,p) \in f\left(\mathbb{R}^2\right)$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(s,p) = f(x,y) = (x+y, xy)$. On a donc $s = x + y$ et $p = xy$.
   Le polynôme $X^2 - sX + p$ admet donc deux racines réelles, x et y. On en déduit que le discriminant de ce polynôme est positif, c'est-à-dire $s^2 - 4p \geq 0$. Donc $f\left(\mathbb{R}^2\right) \subset \left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p \geq 0\right\}$.
   Réciproquement, soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s^2 - 4p \geq 0$. Alors le polynôme $X^2 - sX + p$ a un discriminant positif et il admet donc deux racines réelles x et y (qui peuvent être égales). On a alors $x + y = s$ et $xy = p$. Donc $(s,p) = f(x,y) \in f(\mathbb{R}^2)$.
   Ainsi, $f(\mathbb{R}^2) = \left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p \geq 0\right\}$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On définit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[CD]$ et L le milieu de $[AD]$. Soit G le barycentre de $((A,1),(B,1),(C,1),(D,1))$, montrer que G est le milieu de $[IK]$ et de $[JL]$.

I est le barycentre de $((A,1),(B,1))$ et K est le barycentre de $((C,1),(D,1))$. Par associativité des barycentres, G est le barycentre de $((I,2),(K,2))$, c'est-à-dire que G est le milieu du segment $[IK]$. Le même raisonnement marche pour $[JL]$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5.
Soient E, F et G trois ensembles, soient $f : E \longrightarrow F$ et $h : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe $g : F \longrightarrow G$ telle que $h = g \circ f$ si et seulement si :

$$\forall x,\, y \in E,\ (f(x) = f(y)) \Longrightarrow (h(x) = h(y))\,.$$

$\triangleright$ Si $h = g \circ f$ avec $g : F \longrightarrow G$, alors pour tous x, $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, on a $h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y)$.

$\triangleleft$ Supposons que pour tous x, $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, on ait $h(x) = h(y)$. Construisons une fonction $g : F \to G$ de la façon suivante : pour tout $z \in f(E)$, on pose $g(z) = h(x)$ où $x \in E$ est tel que $z = f(x)$. Puisque si $f(x) = f(y)$, la fonction g est bien définie sur $f(E)$.
Pour $z \notin f(E)$, on pose $g(z) = 0$ (par exemple, on peut poser n'importe quoi dans ce cas).
On a bien défini une fonction $g : F \longrightarrow G$ telle que, pour tout $x \in E$, $h(x) = g(f(x))$.

Exercice 6. Soit $A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{R}^2$ et $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ avec $t_1 + \ldots + t_p > 0$. Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \sum_{k=1}^{p} t_k MA_k^2 \end{array},$$

où MA_k est la distance euclidienne entre M et A_k, c'est-à-dire $MA_k = \sqrt{MA_k \cdot MA_k}$. Soit G le barycentre de $((A_1,t_1),\ldots,(A_p,t_p))$, montrer que f atteint un minimum en G.

Soit $M \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(M) &= \sum_{k=1}^{p} t_k \overrightarrow{MA_k} \cdot \overrightarrow{MA_k} \\ &= \sum_{k=1}^{p} t_k \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_k}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} t_k \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG} + 2\sum_{k=1}^{p} t_k \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA_k} + \sum_{k=1}^{p} t_k \overrightarrow{GA_k} \cdot \overrightarrow{GA_k} \\ &= (t_1 + \ldots + t_p) MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \sum_{k=1}^{p} t_k \overrightarrow{GA_k} + \sum_{k=1}^{p} t_k GA_k^2 \\ &= (t_1 + \ldots + t_p) MG^2 + f(G) \geq f(G). \end{aligned}$$

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 7. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 + x_2 & = & 1 \end{array} \right.$

2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 & = & 1 \end{array} \right.$

Exercice 8. 1. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $u = (5,3,2)$, $v = (1,-3,1)$, $w = (4,0,8)$.
Déterminer une base de $Vect(u,v,w)$ ainsi que sa dimension.

2. Dans $\mathbb{R}^4$ on pose $a = (1,2,-1,3)$, $b = (5,11,8,12)$, $c = (3,7,10,6)$, $d = (5,12,21,9)$.
Déterminer une base de $Vect(a,b,c,d)$ ainsi que sa dimension.

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{K}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 :

1) On résout :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 0 - 3x_2 = 7 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -3 - 2x_2 = -3 + \frac{6}{7} = -\frac{15}{7} \\ x_2 = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(-\frac{15}{7} ; -\frac{3}{7}\right)\right\}$.

2) On résout :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 0 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 0 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}}{\iff} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 0 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0 + 0 + 8x_3 = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3 \\ x_2 = -3 - 2x_3 \\ x_3 = \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \frac{43}{8} \\ x_2 = \frac{-28}{8} \\ x_3 = \frac{7}{8} \end{cases}$$

L'ensemble des sol est $\left\{\left(\frac{43}{8} ; -\frac{28}{8} ; \frac{7}{8}\right)\right\}$.

Exercice 8 : 1) On teste si la famille (u, v, w) est libre.

- Si oui, on a une base.
- Si non, on trouvera des vecteurs combinaison linéaire des autres, et une sous-famille libre.

On résout : $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ $\qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (5\alpha + \beta + 4\gamma ; 3\alpha - 3\beta ; 2\alpha + \beta + 8\gamma) = (0;0;0)$$

équation vectorielle

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 0 = 0 \\ 2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + 5\alpha + 4\gamma = 0 \\ -3\beta + 3\alpha + 0 = 0 \\ \beta + 2\alpha + 8\gamma = 0 \end{cases}$$

système linéaire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + 5\alpha + 4\gamma = 0 \\ 0 + 18\alpha + 12\gamma = 0 \\ 0 - 3\alpha + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + 5\alpha + 4\gamma = 0 \\ 0 - 3\alpha + 4\gamma = 0 \\ 0 + 18\alpha + 12\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + 5\alpha + 4\gamma = 0 \\ 0 - 3\alpha + 4\gamma = 0 \\ 0 + 0 + 36\gamma = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ $\qquad L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$

(système échelonné)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -5\alpha - 4\gamma = 0 \\ \alpha = \frac{-4}{-3}\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0;0;0)$$

Donc, la famille (u, v, w) est libre.

C'est une base de Vect(u, v, w), qui est de dimension 3.

2) On teste si la famille (a, b, c, d) est libre.

On résout :

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0 \quad (*) \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta + 3\gamma + 5\delta = 0 \\ 2\alpha + 11\beta + 7\gamma + 12\delta = 0 \\ -\alpha + 8\beta + 10\gamma + 21\delta = 0 \\ 3\alpha + 12\beta + 6\gamma + 9\delta = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha + 5\beta + 3\gamma + 5\delta = 0 \\ 0 + \beta + \gamma + 2\delta = 0 \\ 0 + 13\beta + 13\gamma + 26\delta = 0 \\ 0 - 3\beta - 3\gamma - 6\delta = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 13L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha + 5\beta + 3\gamma + 5\delta = 0 \\ 0 + \beta + \gamma + 2\delta = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(système échelonné)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5\beta - 3\gamma - 5\delta = -5(-\gamma - 2\delta) - 3\gamma - 5\delta \\ \beta = -\gamma - 2\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma + 5\delta \\ \beta = -\gamma - 2\delta \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\{(2\gamma+5\delta\,;-\gamma-2\delta;\gamma;\delta);\ \gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$

$$=\mathrm{Vect}\big((2;-1;1;0);(5;-2;0;1)\big)$$

La famille $(a;b;c;d)$ n'est pas libre.

Les solutions donnent : $2a-b+c=0 \Leftrightarrow c=-2a+b$

$$5a-2b+d=0 \Leftrightarrow d=-5a+2b$$

Donc, on a $\mathrm{Vect}(a;b;c;d)=\mathrm{Vect}(a;b)$.

De plus, on a $\alpha a+\beta b=0 \Leftrightarrow \alpha a+\beta b+0.c+0.d=0$

Or, parmi les solutions $(\alpha;\beta;\gamma;\delta)$ de $(*)$,

on a $\gamma=0$ et $\delta=0 \Leftrightarrow (\alpha;\beta;\gamma;\delta)=(0;0;0;0)$.

Donc, la famille $(a;b)$ est libre.

C'est une base de $\mathrm{Vect}(a;b;c;d)$, qui est de dim. 2.

Exercice 9 : Pour (S) un système linéaire associé à

$$AX=Y,$$

on peut résoudre ce système plus vite en échelonnant la matrice $B=(A\,|\,Y)$.

Avec la méthode du Pivot, on obtient une matrice $C = (A' \,\vdots\, Y')$ qui est échelonnée.

Donc, on a une matrice M inversible telle que

$C = MB$, c'est-à-dire $\begin{cases} A' = MA \\ Y' = MY \end{cases}$

Comme M inversible, on a $AX = Y \iff MAX = MY$

$\iff A'X = Y'$ ← système échelonné

1) On échelonne la matrice $(A \,\vdots\, Y)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

matrice échelonnée

On a donc :

$$(1) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 = 0 \\ 0 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 + 0 - 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 = 0 \\ x_2 = x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des sol. est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2) On échelonne la matrice $(A \,\vdots\, Y)$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a.L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (*_1)$$

- Si $1-a=0 \Leftrightarrow a=1$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \quad (2) \Leftrightarrow \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \{ x_1 = -x_2 - x_3$$

L'ens. des sol. est $\left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_2, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$

$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ sous-ev de dim. 2

- Si $1-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$, on a :

$$(*_1) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{a-1} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{a-1} L_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2-a & 0 \end{pmatrix} \quad (*_2)$$

- Si $a \neq 1$ et $-2-a=0 \Leftrightarrow a=-2$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $(2) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

L'ens des sol est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. sous-ev de dim 1

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, on a :

$(*_2) \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{-2-a} L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc, $(2) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + a x_3 = 0 \\ 0 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 + 0 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - a x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

L'ens. des sol. est $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, sous-ev de dim 0.

3) On échelonne la matrice $(A \,\vdots\, Y)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2a & 1 \\ -a^2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + a^2 L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1+2a^3 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

(matrice échelonnée)

- On a $1+2a^3 = 0 \iff a^3 = -\frac{1}{2} \underset{\text{car } a \in \mathbb{R}}{\iff} a = -\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$

Si $1+2a^3 = 0 \iff a = -2^{-\frac{1}{3}}$, on a :

$$(3) \iff \begin{cases} x_1 - 2.2^{-\frac{1}{3}} x_2 = 1 \\ 0 + 0 = \underbrace{1 + 2^{-\frac{2}{3}}}_{\neq 0} \end{cases}$$. Ce système n'a pas de solutions.

- Si $1+2a^3 \neq 0 \iff a \neq -2^{-\frac{1}{3}}$, on a :

$$(3) \iff \begin{cases} x_1 + 2a x_2 = 1 \\ 0 + (1+2a^3) x_2 = 1+a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 - 2a x_2 = \dfrac{-2a+1}{1+2a^3} \\ x_2 = \dfrac{1+a^2}{1+2a^3} \end{cases}$$

L'ensemble des sol est $\left\{ \dfrac{1}{1+2a^3} \begin{pmatrix} -2a+1 \\ 1+a^2 \end{pmatrix} \right\}$.