Feuille de TD n° 6

Applications, Méthode du Pivot, Systèmes linéaires

20 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Démontrer que la relation $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.

1. Soient f et g des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$
Justifier que les applications f et g sont bien définies puis calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$?
2. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Soit A une partie de E. Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Exercice 3. Déterminer l'image directe $f(I)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x \exp(x)$ et $I = \mathbb{R}_-$,
2. $f(x) = x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \mathbb{R}_+^*$,
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ et $I =]0, 1]$,
4. $f(z) = z^2$ et $I = \mathbb{C}$,
5. $f(x) = x + \mathrm{E}(x)$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x et $I = \mathbb{R}_+$,
6. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$ et $I = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On définit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[CD]$ et L le milieu de $[AD]$. Soit G le barycentre de $((A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1))$, montrer que G est le milieu de $[IK]$ et de $[JL]$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5.
Soient E, F et G trois ensembles, soient $f : E \longrightarrow F$ et $h : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe $g : F \longrightarrow G$ telle que $h = g \circ f$ si et seulement si :
$$\forall x, y \in E, \, (f(x) = f(y)) \Longrightarrow (h(x) = h(y)) \, .$$

Exercice 6. Soit $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{R}^2$ et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ avec $t_1 + \dots + t_p > 0$. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \sum_{k=1}^p t_k MA_k^2 \end{array},$$
où MA_k est la distance euclidienne entre M et A_k, c'est-à-dire $MA_k = \sqrt{\overrightarrow{MA_k} \cdot \overrightarrow{MA_k}}$. Soit G le barycentre de $((A_1, t_1), \dots, (A_p, t_p))$, montrer que f atteint un minimum en G.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 7. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 &= 1 \end{cases}$

Exercice 8.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $u = (5,3,2)$, $v = (1,-3,1)$, $w = (4,0,8)$.
   Déterminer une base de $Vect(u,v,w)$ ainsi que sa dimension.
2. Dans $\mathbb{R}^4$ on pose $a = (1,2,-1,3)$, $b = (5,11,8,12)$, $c = (3,7,10,6)$, $d = (5,12,21,9)$.
   Déterminer une base de $Vect(a,b,c,d)$ ainsi que sa dimension.

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{K}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ -a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.