# Feuille de TD n° 7

*Rang d'une matrice, Méthode du Pivot, Injectivité et Surjectivité*

31 octobre 2021

---

■ *Pour commencer . . .*

**Exercice 1.**
Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.**
Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
4. $B, B^2$, et $B^3$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 3.**
Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure :
$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors $rg(A) = n$.
2. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i = 0$, alors $rg(A) < n$.

---

1. Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $A$, vues comme vecteurs dans $\mathbb{K}^n$.
On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Comme $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, on a $a_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
La forme de $A$ donne : $C_i = a_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i} e_j$.
Soient $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que $b_1 C_1 + \dots + b_n C_n = 0$.
On montre par récurrence descendante que les nombres $b_n, \dots, b_1$ sont nuls.
En effet, le coefficient devant $e_n$ est $b_n.a_n$, et on doit avoir $b_n a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$ on obtient $b_n = 0$.
Si $b_n, b_{n-1}, \dots, b_{n-k}$ sont nuls, pour un $0 \leq k \neq n-2$, alors on a :
$$b_1 C_1 + \dots + b_{n-k-1} C_{n-k-1} = 0$$
. Le coefficient devant $e_{n-k-1}$ est $b_{n-k-1}.a_{n-k-1}$, et ce coefficient doit être nul. Comme $a_{n-k-1} = 0$ on en déduit que $b_{n-k-1} = 0$. Cela termine la récurrence.
Ainsi, si $b_1 C_1 + \dots + b_n C_n = 0$, on en déduit que $b_1, \dots, b_n = 0$. Donc la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre, donc elle est de rang $n$.
**Autre preuve, version familles génératrices :**
On démontre par récurrence sur $1 \leq k \leq n$ que $Vect(C_1, \dots, C_k) = Vect(e_1, \dots, e_k)$.
Pour $k = 1$ on a $C_1 = \alpha_1 e_1$, avec $a_1 \neq 0$. La propriété est vraie.
Supposons la propriété vraie pour $1 \leq k < n$. Comme $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, on a $a_{k+1} \neq 0$.
Le vecteur colonne $C_{k+1}$ s'écrit :
$$C_{k+1} = a_{k+1} e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i,k+1} e_i.$$

On a donc
$$e_{k+1}=\frac{1}{a_{k+1}}(C_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}a_{i,k+1}e_i)\in Vect(e_1,\dots,e_k,C_{k+1}).$$
Avec la propriété au rang $k$, on obtient que $e_{k+1}\in Vect(C_1,\dots,C_{k+1})$.
On en déduit que
$$Vect(e_1,\dots,e_{k+1})\subset Vect(C_1,\dots,C_{k+1})\subset Vect(e_1,\dots,e_{k+1}),$$
donc ces deux sous-espaces sont égaux.
Cela termine la récurrence.
Cela montre aussi que $Vect(C_1,\dots,C_k)$ est un sous-ev de dimension $k$.
En appliquant la propriété pour $k=n$, on trouve alors que $rg(A)=rg(C_1,\dots,C_n)=n$.

2. Si $\Pi_{i=1}^n a_i=0$, il existe un entier $i$ tel que $a_i=0$. Soit $k$ le plus petit entier tel que $a_k=0$.
   • Si $k=1$, on a $a_1=0$, et donc la colonne $C_1$ de la matrice $A$ est nulle. On obtient donc que $rg(A)=rg(C_1,\dots,C_n)\le n-1<n$.
   • On suppose maintenant $k>1$.
   On a ainsi $a_1,\dots,a_{k-1}$ non-nuls.
   On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
   D'après la première question, on en déduit que la famille $(C_1,\dots,C_{k-1})$ est de rang $k-1$ (comme sous-famille d'une famille libre). Comme cette famille est incluse dans le sous-ev $Vect(e_1,\dots,e_{k-1})$, de dimension $k-1$, c'est donc une base de ce sous-ev.
   On a ainsi
   $$Vect(C_1,\dots,C_{k-1})=Vect(e_1,\dots,e_{k-1}).$$
   Comme $a_k=0$, le vecteur colonne $C_k$ est de la forme $C_k=\sum_{i=1}^{k-1}a_{i,k}e_i$. Donc $C_k\in Vect(e_1,\dots,e_{k-1})$.
   Le vecteur $C_k$ est donc combinaison linéaire des vecteurs $C_1,\dots,C_{k-1}$. Ainsi, la famille $(C_1,\dots,C_k)$ n'est pas libre (elle est de rang $k-1$).
   La famille $(C_1,\dots,C_n)$ ne peut donc pas être de rang $n$ (sinon elle serait libre, et la sous-famille $(C_1,\dots,C_k)$ serait elle aussi libre). Ainsi, $rg(A)=rg(C_1,\dots,C_n)<n$.

## *Un peu de Géométrie . . .*

**Exercice 4.**

1. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x)=\sin(x)$ et $I=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
   (b) $f(x)=\cos(x)$ et $I=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.
2. Déterminer $f\left(f^{-1}(I)\right)$ avec $f(x)=\sin(x)$ et $I=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.
3. Déterminer $f^{-1}\left(f(I)\right)$ avec $f(x)=x^2-2x+3$ et $I=[2,3]$.

---

1. (a) $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right)=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
   (b) $\cos^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$.
2. $\sin\left(\sin^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\right)\right)=\left[\frac{1}{2},1\right]$.
3. $f^{-1}\left(f\left([2,3]\right)\right)=[-1,0]\cup[2,3]$.

**Exercice 5.** Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

1. $f_1:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\longmapsto 2y$,
2. $f_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\ ;\ (x,y)\longmapsto(x+y,x-y)$,
3. $f_3:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\ ;\ n\longmapsto n+1$,
4. $f_4:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}\ ;\ n\longmapsto n+1$,
5. $f_5:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}\ ;\ n\longmapsto\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon,}\end{cases}$
6. $f_6:\mathbb{R}^\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}^\mathbb{N}\ ;\ (u_0,u_1,u_2,\dots)\longmapsto(0,u_0,u_1,u_2,\dots)$,
7. $f_7:\mathbb{R}^\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}^\mathbb{N}\ ;\ (u_0,u_1,u_2,\dots)\longmapsto(u_1,u_2,u_3,\dots)$.

---

1. Non injective ($(0,1)$ et $(1,1)$ ont la même image), surjective.
2. Injective et surjective.
3. Injective, non surjective (0 n'admet pas d'antécédent).
4. Injective et surjective.
5. Injective et surjective.
6. Injective, non surjective (la suite constante égale à 1 n'a pas d'antécédent).
7. Non injective ($(1,1,1,\dots)$ et $(0,1,1,1,\dots)$ ont la même image), surjective.

**Exercice 6.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f:E\longrightarrow F$ une application.

1. Soient $A\subset E$ et $B\subset F$. Démontrer que $f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)=f(A)\cap B$.
2. Démontrer que $f$ est injective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$, $A=f^{-1}\left(f(A)\right)$.
3. Démontrer que $f$ est surjective si et seulement si pour toute partie $B$ de $F$, $B=f\left(f^{-1}(B)\right)$.

---

1. $\triangleright$ Soit $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$. Il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, $y = f(x) \in B$. Donc $y \in f(A) \cap B$. D'où $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) \subset f(A) \cap B$.
   $\triangleleft$ Soit $y \in f(A) \cap B$. En particulier, $y \in f(A)$. Il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, $f(x) \in B$ et donc $x \in f^{-1}(B)$. Donc $x \in A \cap f^{-1}(B)$. Comme $y = f(x)$, on a $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$. D'où $f(A) \cap B \subset f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$.
2. • Supposons $f$ injective. Soit $A \subset E$. Montrons que $A = f^{-1}(f(A))$.
   $\triangleright$ Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   $\triangleleft$ Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$. Par injectivité de $f$, on en déduit que $x = y$. Comme $y \in A$, $x = y \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
   • Réciproquement, supposons que pour toute partie $A$ de $E$, $A = f^{-1}(f(A))$. Montrons que $f$ est injective.
   Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $f(u) = f(v)$. Alors $f(u) \in \{f(v)\} = f(\{v\})$. Donc $u \in f^{-1}(f(\{v\}))$. Or, par hypothèse, $f^{-1}(f(\{v\})) = \{v\}$. Donc $u \in \{v\}$. Donc $u = v$. $f$ est donc injective.
3. • Supposons $f$ surjective. Soit $B \subset E$.
   $\triangleright$ Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$, et donc $y = f(x) \in B$. Donc $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
   $\triangleleft$ Soit $y \in B$. Par surjectivité de $f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, $f(x) = y \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$. Donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. D'où $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
   • Réciproquement, supposons que pour toute partie $B$ de $F$, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$. Montrons que $f$ est surjective.
   Soit $y \in F$. $F$ étant une partie de $F$, on a $f\left(f^{-1}(F)\right) = F$. Donc $y \in f\left(f^{-1}(F)\right)$. Il existe donc $x \in f^{-1}(F)$ tel que $y = f(x)$. Donc $x \in E$ est un antécédent de $y$ par $f$. $f$ est donc surjective.

**Exercice 7.** Soit $E$ un ensemble.

1. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que $f$ est injective si et seulement si il existe une application $g : E \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Soit $g : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que $g$ est surjective si et seulement si il existe une application $f : E \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

---

1. On a vu dans le cours que si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.
   Réciproquement, supposons que $f$ est injective : pour tous $x$, $y \in E$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow \mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E(y)$. On a vu dans le TD6 que cela implique qu'il existe une application $g$ telle que $\mathrm{Id}_E = g \circ f$. En effet, pour $y \in f(E)$, on pose $g(y) = x$, où $x$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$.
2. On a vu dans le cours que si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.
   Réciproquement, supposons que $g$ est surjective. Pour tout $x \in E$, il existe un antécédent $y \in E$ de $x$ par $g$ : $g(x) = y$. On définit alors une application $f$ qui envoie $x \in E$ sur un antécédent (n'importe lequel) $y$ de $x$ par $g$.

## Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

On utilise la méthode du Pivot :

1)

$$\begin{array}{c} (A \;\vdots\; I_3) \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -15 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -15 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & -10 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$

On a échelonné la matrice A, et on a obtenu une matrice sans lignes nulles. Donc A est inversible.

On poursuit la méthode du Pivot pour calculer $A^{-1}$.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{15} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{15} L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{6}{15} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \end{array}\right) = (I_3 \mid M).$$

On a ainsi $A^{-1} = M = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -15 & 6 & 6 \\ 35 & -5 & -15 \\ 10 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2)

$$(A \mid I_4)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -6 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 18 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -6 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 18 & 1 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -6 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3$

En échelonnant la matrice $A$ de départ, on a obtenu une matrice avec une ligne nulle.

Donc, $A$ n'est pas inversible.

## Exercice 2

1) Pour $C_1; \dots; C_4$ les colonnes de $A$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$C_3 = C_4 = C_1$.

Donc, $\mathrm{Vect}(C_1; \dots; C_4) = \mathrm{Vect}(C_1; C_2)$.

Et $(C_1; C_2)$ est libre.

Donc, $rg(A) = rg(C_1; \dots; C_4) = 2$.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On a $C_1 = C_2 = \dots = C_n$.

Donc $\mathrm{Vect}(C_1; \dots; C_n) = \mathrm{Vect}(C_1)$. Et $C_1 \neq 0$.

Donc, $rg(A) = 1$.

3) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On a $C_1 = C_n$

$C_2 = C_3 = \dots = C_{n-1}$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(C_1; \dots; C_n) = \mathrm{Vect}(C_1; C_2)$

Et $(C_1; C_2)$ est libre.

Donc, $rg(A) = 2$.

3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = 0$

Donc $rg(B) = 2$ $rg(B^2) = 1$ $rg(B^3) = 0$.

Exercice 1 :

3) On a $\overset{A}{\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}$ inversible si et seulement si :

$a \cdot 7 - (2a) \cdot 5 = 0 \iff a(-3) = 0 \iff a = 0$.

Si $a = 0$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ pas inversible.

Si $a \neq 0$, A est inversible, avec $A^{-1} = \frac{1}{-3a} \begin{pmatrix} 7 & -2a \\ -5 & a \end{pmatrix}$.