Feuille de TD n° 7

Rang d'une matrice, Méthode du Pivot, Injectivité et Surjectivité

31 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.
Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
4. B, B^2, et B^3, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors $rg(A) = n$.
2. Montrer que si $\Pi_{i=1}^n a_i = 0$, alors $rg(A) < n$.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 4.

1. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \sin(x)$ et $I = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.
   (b) $f(x) = \cos(x)$ et $I = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$.
2. Déterminer $f\left(f^{-1}(I)\right)$ avec $f(x) = \sin(x)$ et $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
3. Déterminer $f^{-1}\left(f(I)\right)$ avec $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $I = [2, 3]$.

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \longmapsto 2y$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ;\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$,
3. $f_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ ;\ n \longmapsto n + 1$,
4. $f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ;\ n \longmapsto n + 1$,
5. $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ;\ n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$

6. $f_6 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \longmapsto (0, u_0, u_1, u_2, \ldots)$,
7. $f_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \longmapsto (u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.
2. Démontrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $A = f^{-1}(f(A))$.
3. Démontrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Exercice 7. Soit E un ensemble.

1. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si il existe une application $g : E \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Soit $g : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que g est surjective si et seulement si il existe une application $f : E \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.