Feuille de TD n° 8

Trace d'une matrice, Polynômes, Applications

15 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.

1. Soit $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f_1 est bijective et donner sa bijection réciproque.
2. Soit $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$.
   (a) Déterminer l'image de f_2.
   (b) La fonction f_2 est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? La fonction f_2 est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur son image ?
   (c) Montrer que f_2 induit une bijection de $[-1,1]$ sur un ensemble à déterminer.

---

1. Soit $y \in]-1,1[$, on cherche à résoudre $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On remarque tout d'abord que si $f(x) = y$, alors x et y ont nécessairement le même signe. Donc $f(x) = 0$ équivaut à $x = 0$. Il reste deux cas :
   - **Si $\mathbf{y > 0}$** : On cherche $x > 0$ tel que $y = f(x) = \frac{x}{1+x}$, c'est-à-dire :
   $$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y + xy = x \\ &\iff y = x(1-y) \\ &\iff x = \frac{y}{1-y} = \frac{y}{1-|y|}. \end{aligned}$$
   On en déduit que tout $y \in]0,1[$ a un unique antécédent $\frac{y}{1-|y|}$ dans $\mathbb{R}$ par f.
   - **Si $\mathbf{y < 0}$** : On cherche $x < 0$ tel que $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$, c'est-à-dire :
   $$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y - xy = x \\ &\iff y = x(1+y) \\ &\iff x = \frac{y}{1+y} = \frac{y}{1-|y|}. \end{aligned}$$
   On en déduit que tout $y \in]-1,0[$ a un unique antécédent $\frac{y}{1-|y|}$ dans $\mathbb{R}$ par f.

   On a donc montré que f est bijective et que sa bijection réciproque est
   $$f^{-1} : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y}{1-|y|} \end{array}.$$
2. (a) On voit d'abord que $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0^+$. L'étude des variations de f_2 montre que f_2 atteint un minimum $-\frac{1}{2}$ en -1 et un maximum $\frac{1}{2}$ en 1. Donc $f_2(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
   (b) f_2 n'est pas bijective puisqu'on a montré qu'elle n'est pas surjective. f_2 n'est pas non plus bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ car elle n'est pas injective.
   (c) f_2 est strictement croissante sur $[-1,1]$ donc injective. Elle induit donc une bijection de $[-1,1]$ sur $f_2([-1,1]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 2. On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}^3)$ de f. f est-elle surjective ?

---

1. On vérifie l'axiome :
$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) &= \left(\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - 2(\alpha z + \beta z')\right) \\ &= \alpha f((x,y,z)) + \beta f((x',y',z')). \end{aligned}$$
2. On a
$$f((x,y,z)) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x+y & = 0 \\ x-2z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} y & = -x \\ z & = -\frac{1}{2}x \end{array} \right. .$$
On en déduit que $f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{vect}((2,-2,-1))$. On a $f((2,-2,-1)) = f(0)$ donc f n'est pas injective.
3. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a $f\left((0, u, -\frac{1}{2}v)\right) = (u,v)$ donc $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles. On considère une application $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si pour tous $A \subset E$ et $B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

---

1. Procédons par double implication.
   - Supposons f injective. L'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est toujours vraie. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$: $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $z \in A$ tel que $f(x) = f(z)$. Or f est injective donc $x = z \in A$.
   - Supposons que pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$. Soit x, $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$ donc $f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{y\}))$, ce qui donne grâce à l'hypothèse $\{x\} = \{y\}$, c'est-à-dire $x = y$.
2. Procédons par double implication.
   - Supposons f injective. On sait que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est toujours vrai. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$: il existe $u \in A$ et $v \in B$ tels que $y = f(u)$ et $y = f(v)$, ce qui donne $f(u) = f(v)$. Or f est injective donc $u = v$. Donc $u \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$.
   - Réciproquement, supposons que pour tous A, $B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Soit $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. On a alors $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ donc $f(\{x\} \cap \{y\}) = \emptyset = f(\{x\}) \cap f(\{y\})$. Donc $f(x) \neq f(y)$.
3. Procédons par double implication.
   - Supposons f bijective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrons par double inclusion que $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

     Soit $y \in f(\complement_E A)$. Alors il existe $x \in \complement_E A$ tel que $y = f(x)$. Supposons par l'absurde que $y \in f(A)$. Alors il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Alors $y = f(x) = f(x')$ et par injectivité de f, $x = x' \in A$. Ce qui est absurde car $x \notin A$. Donc $y \notin f(A)$ et $y \in \complement_F f(A)$. D'où $f(\complement_E A) \subset \complement_F f(A)$.

     Soit $y \in \complement_F f(A)$. Alors $y \notin f(A)$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \notin A$ puisque que $y \notin f(A)$. Donc $x \in \complement_E A$ et $y = f(x) \in f(\complement_E A)$. D'où $\complement_F f(A) \subset f(\complement_E A)$.
   - Réciproquement, supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\complement_E A) \subset \complement_F f(A)$.

     Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq y$. Prenons $A = \{x\}$. Alors $y \in \complement_E A$ et $f(y) \in f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$ Donc $f(y) \notin f(A) = \{f(x)\}$. Donc $f(y) \neq f(x)$. Donc f est injective.

     On a $\mathrm{Im}(f) = f(E) = f(\complement_E \emptyset) = \complement_F f(\emptyset) = \complement_F \emptyset = F$. Donc f est surjective.

Exercice 4.
1. Construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
2. Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles A tels que $A \subset E$. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

---

1. On définit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$. On peut vérifier que f est bien bijective.
2. Supposons qu'il existe $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ bijective. Soit $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$. Puisque φ est surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = \varphi(a)$.
   — Supposons que $a \in A$: par définition de A, $a \notin \varphi(a) = A$, ce qui est absurde.
   — Supposons que $a \notin A$. Alors $a \in \complement_E A = \{x \in E \mid x \in \varphi(x)\}$ donc $a \in \varphi(a) = A$, ce qui est à nouveau absurde.

   Donc un tel $a \in E$ ne peut pas exister et donc la bijection φ ne peut pas exister.

■ *Un peu d'Algèbre . . .*

Exercice 5.
Soit $n \geq 1$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la fonction $f_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto Tr(AM)$.
Montrer que la fonction $A \mapsto f_A$ est injective.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $f_A = f_B$. Montrons que $A = B$.
On a alors $Tr(AM) = Tr(BM)$ pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Cela donne $0 = Tr(AM) - Tr(BM) = Tr(AM - BM) = Tr((A - B)M)$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $M = E_{i,j}$.
On a alors

$$Tr((A - B)M) = Tr((A - B)E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n}(a_{k,r} - b_{k,r})(\delta_{r,i}\delta_{k,j})) = a_{j,i} - b_{j,i}.$$

Donc $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tous i, j. Ainsi, on a bien $A = B$.

Exercice 6.
Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. Ecrire ces polynômes sous forme de suite
$$3X^3-2\,,\ (X+1)^2\,,\ (X^2-3)^3\,,\ (3X+2)(X^3-4)$$
2. Ecrire ces polynômes comme combinaison linéaire des X^k, $k \geq 0$.
$$(1,2,0,\ldots)^2\,,\ (0,0,0,1,0,\ldots)+(1,-1,1,0,\ldots)\,,\ (3,0,-1,0,\ldots)\times(4,1,0,\ldots)$$
3. Ecrire ces polynômes comme combinaison linéaire des X^k, $k \geq 0$.
$$(X+1)(X-2)(X+3)\,,\ (1+X)^n\,,\ (X^2-1)(1+X+\ldots+X^n)$$

---

1. $$(-2,0,0,3,0,\ldots)\,,\ (1,2,1,0,\ldots)\,,\ (-27,0,27,0,-9,0,1,0,\ldots)\,,\ (-8,-12,0,2,3,0,\ldots)$$
2. $$4X^2+4X+1\,,\ X^3+X^2-X+1\,,\ -X^3-4X^2+3X+12$$
3. $$X^3+2X^2-5X-6\,,\ \sum_{k=0}^{n} X^k\binom{n}{k}\,,$$
$$(X+1)(X-1)(1+\ldots+X^n)=(X+1)(X^{n+1}-1)=X^{n+1}+X^{n+1}-X-1$$

Exercice 7.
Soient $n,p \geq 0$. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversible.
Montrer que l'on a $rg(A) = rg(AM)$.

Soient $(C_1,\ldots,C_p)$ les colonnes de A, et $(C'_1,\ldots,C'_p)$ les colonnes de AM.
Pour montrer que $rg(A) = rg(C_1,\ldots,C_p) = rg(C'_1,\ldots,C'_p) = rg(AM)$, on va montrer que $Vect(C_1,\ldots,C_p) = Vect(C'_1,\ldots,C'_p)$.
Soient $m_{i,j}$ les coefficients de M.
Par définition du produit matriciel $A \times M$, on a :
$$C'_j = \sum_{k=1}^{p} C_k m_{k,j}\,, \forall 1 \leq j \leq p.$$
Donc, $C'_1,\ldots,C'_p$ appartiennent à $Vect(C_1,\ldots,C_p)$.
Comme $A = (AM) \times M^{-1}$, on montre de la même façon que $C_1,\ldots,C_p$ appartiennent à $Vect(C'_1,\ldots,C'_p)$.
On en déduit donc que les sous-ev $Vect(C_1,\ldots,C_p)$ et $Vect(C'_1,\ldots,C'_p)$ sont égaux, et donc que leurs familles génératrices ont même rang.

Indications

Exercice 4. 2. Supposer qu'il existe une bijection $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ et considérer un antécédent de l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\} \in \mathcal{P}(E)$.