Feuille de TD n° 8

Trace d'une matrice, Polynômes, Applications

15 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.

1. Soit $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f_1 est bijective et donner sa bijection réciproque.
2. Soit $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$.
   (a) Déterminer l'image de f_2.
   (b) La fonction f_2 est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? La fonction f_2 est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur son image ?
   (c) Montrer que f_2 induit une bijection de $[-1,1]$ sur un ensemble à déterminer.

Exercice 2. On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}^3)$ de f. f est-elle surjective ?

Pour aller plus loin . . .

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles. On considère une application $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si pour tous $A \subset E$ et $B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

Exercice 4.
1. Construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
2. Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles A tels que $A \subset E$. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 5.
Soit $n \geq 1$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la fonction $f_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto Tr(AM)$.
Montrer que la fonction $A \mapsto f_A$ est injective.

Exercice 6.
Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. Ecrire ces polynômes sous forme de suite
$$3X^3 - 2\,,\ (X+1)^2\,,\ (X^2-3)^3\,,\ (3X+2)(X^3-4)$$
2. Ecrire ces polynômes comme combinaison linéaire des X^k, $k \geq 0$.
$$(1,2,0,\ldots)^2\,,\ (0,0,0,1,0,\ldots)+(1,-1,1,0,\ldots)\,,\ (3,0,-1,0,\ldots)\times(4,1,0,\ldots)$$
3. Ecrire ces polynômes comme combinaison linéaire des X^k, $k \geq 0$.
$$(X+1)(X-2)(X+3)\,,\ (1+X)^n\,,\ (X^2-1)(1+X+\ldots+X^n)$$

Exercice 7.
Soient $n, p \geq 0$. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversible.
Montrer que l'on a $rg(A) = rg(AM)$.

Indications

Exercice 4. 2. Supposer qu'il existe une bijection $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ et considérer un antécédent de l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\} \in \mathcal{P}(E)$.