Feuille de TD n° 9

Polynômes, Applications linéaires

1er janvier 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Calculer $\deg(P \circ Q)$.
2. On pose $f : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P \circ Q \in \mathbb{K}[X]$.
   Pour quelles valeurs de Q la fonction f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.
Soit $f : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(0) \in \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$.
Que vaut $f^{-1}(\{a\})$?
Montrer que cet ensemble est un sous-espace affine, et calculer sa dimension.

Exercice 3.
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \geq 1$.
La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$ est-elle une base de $\mathbb{K}_n[X]$?

Exercice 4.
Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

Exercice 5.
Dans $\mathbb{R}[X]$ soit le sous-ensemble H des polynômes P tels que $\int_0^1 P(t)dt = 0$, et soit C le sous-ensemble des polynômes constants.

1. Montrer que C et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] = H \oplus C$.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 6.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 7.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.