Feuille de TD n° 10

Déterminants, Endomorphismes orthogonaux, Anneaux

6 mai 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit (u, v, w) une famille libre de vecteurs de E et soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On définit $s = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que la famille $(u + s, v + s, w + s)$ soit libre.

Exercice 2. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 2 ou 3 de $\mathbb{R}^3$. Si G est un sev de E, on définit $G^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in G,\, x \cdot y = 0\}$.
Soit u un endomorphisme orthogonal de E. Soit F un sev de E.

1. Montrer que $(u(F))^\perp = u\left(F^\perp\right)$.
2. Montrer que si $u(F) \subset F$, alors $u\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

Exercice 3. (Formule de Cramer)
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on note X l'unique solution du système linéaire $AX = B$. Montrer que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, avec

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{et } z = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Pour aller plus loin . . .

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *bilinéaire* si pour tous u, v, $w \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(u + \lambda v, w) = f(u, w) + \lambda f(u, w)$ et $f(u, v + \lambda w) = f(u, v) + \lambda f(u, w)$. On dit que f est *alternée* si pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $f(u, u) = 0$. On dit que f est *antisymétrique* si pour tous u, $v \in \mathbb{R}^2$, $f(u, v) = -f(v, u)$.

1. Supposons que f est bilinéaire. Montrer que f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.
2. Supposons que f est bilinéaire et alternée. Montrer qu'il existe $\alpha(f) \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous u, $v \in \mathbb{R}^2$,
$$f(u, v) = \alpha(f) \det_{\mathcal{C}}(u, v),$$
où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 5.

1. Soit $n \geq 2$. Donner un exemple d'anneau à n éléments.
2. Donner un second exemple d'anneau à 4 éléments.
3. Soit $m \geq 2$. Donner un second exemple d'anneau à m^n éléments.
4. Est-ce que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un anneau intègre ? (Démontrer la réponse)
5. Soient A, B deux anneaux. Montrer que l'anneau produit $A \times B$ n'est pas intègre.

Exercice 6.
Soit A un anneau commutatif.

1. Soit $n \geq 1$. Soit $a \in A$ tel que $a^n = 1$.
Montrer que a est inversible. Combien vaut a^{-1} ?
2. Soit $b \in A$. Soit P un polynôme unitaire tel que $P(0) \in A^\times$ et $P(a) = 0$.
Montrer que a est inversible, et calculer a^{-1}.

3. On suppose que l'ensemble des éléments inversibles $A^\times$ est fini.
   Trouver un polynôme P unitaire tel que $P(c) = 0$, pour tout $c \in A^\times$.

Exercice 7. 1. Soit A un anneau commutatif fini. Trouver un polynôme P tel que $P(a) = 0$ pour tout $a \in A$.

2. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que $Q(X) = X^p - X$ convient.
   On pourra s'aider de l'exercice précédent.
3. Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, trouver un polynôme R, avec $\deg(R) < 6$, tel que $R(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   On pourra chercher un polynôme qui ressemble à Q.