FEUILLE DE TD N° 11

Sous-anneaux, Idéaux, Endomorphismes orthogonaux

20 mai 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soient I, J deux idéaux de A.
On note $I.J = \{i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n;\ n \geq 1,\ i_k \in I,\ j_k \in J\}$.

1. Montrer que $I.J$ est encore un idéal de A.
2. Montrer que $I.J \subset I \cap J$.
3. Montrer que $(I + J).(I \cap J) \subset I.J$.
4. On dit que deux idéaux I et J sont étrangers si $I + J = A$.
   Pour $A = \mathbb{K}[X]$, donner un exemple d'idéaux étrangers (non-triviaux, $I, J \neq A$).
   Pour $A = \mathbb{Z}$, montrer que pour tout idéal $I \neq \mathbb{Z}, \{0\}$ il existe $J \neq \mathbb{Z}$ tel que I et J sont étrangers.
   Pour $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, donner un exemple d'idéaux étrangers (non-triviaux, $I, J \neq A$).
5. Montrer que si I et J sont étrangers, alors $I.J = I \cap J$.

---

1. Il faut d'abord démontrer que $I.J$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
   $0 \times 0 = 0$ est élément de $I.J$.
   Soit $x \in I.J$. On a $x = \sum_{k=1}^n i_k j_k$. Comme I est un idéal, on a $-i_k \in I$, donc $-x = \sum_{k=1}^n -i_k j_k \in I.J$.
   Soit $y = \sum_{l=1}^m i'_l j'_l$. Par définition de $I.J$, on remarque que $x + y \in I.J$.
   Cela prouve que $I.J$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
   Enfin, pour tout a dans A, on a $ax = \sum_{k=1}^n (ai_k)(j_k) \in I.J$.
   Donc, $I.J$ est bien un idéal de A.
2. Soit $x = \sum_{k=1}^n i_k j_k \in I.J$. Comme I est un idéal et comme A est commutatif, on a $i_k j_k = j_k i_k \in I$ pour tout k, donc $x \in I$.
   De même, comme J est un idéal, on a $i_k j_k \in J$ pour tout k, donc $x \in J$.
   Ainsi, $I.J$ est contenu dans I et dans J, donc dans $I \cap J$.
3. Soit $x \in (I + J).(I \cap J)$. On écrit $x = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ avec $a_k \in I + J$ et $b_k \in I \cap J$. Puisque $I.J$ est un idéal, il suffit de prouver que $a_k b_k \in I.J$. On écrit $a_k = i_k + j_k$, de sorte que
   $$a_k b_k = i_k b_k + b_k j_k.$$
   C'est un élément de $I.J$, car $i_k \in I$, $b_k \in J$ et $b_k \in I$, $j_k \in J$.
4. • Pour $I = \langle X \rangle = X.\mathbb{K}[X]$ et $J = (X^2 + 1)\mathbb{K}[X]$, on a $I, J \neq \mathbb{K}[X]$ et $1 = (X^2 + 1) - X.X \in I + J$.
   Donc, $I + J = \mathbb{K}[X]$.
   • Pour I idéal de $\mathbb{Z}$ on a un $n \geq 0$ tel que $I = n\mathbb{Z}$. Comme $I \neq \mathbb{Z}, \{0\}$ on a $n \neq 1$ et $n \neq 0$.
   Donc, il existe $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$ tel que $pgcd(m, n) = 1$ (par exemple $m + 1$). Alors, pour $J = m\mathbb{Z}$, on a $I + J = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = pgcd(n, m)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
   • Pour $I = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ et $J = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}\}$, on a $I + J = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
5. Si $I + J = A$, alors $(I + J) \cdot (I \cap J) = A \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$.
   Comme on a $1 \in A$, on obtient que $A \cdot (I \cap J) = I \cap J$.
   Vu que l'on a aussi $I \cap J \subset I \cdot J$, on obtient l'égalité.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif. Soit $x \in A$. On dit que x est **nilpotent** s'il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$.

1. Soit $x \in A$ nilpotent, et $a \in A$.
   Montrer que ax est nilpotent.
2. Soit $y \in A$ nilpotent. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. En déduire que $N = \{x \in A \text{ t.q. } x \text{ nilpotent}\}$ est un idéal de A.
4. Quels sont les éléments nilpotents dans un anneau intègre ?
5. Donner un exemple d'anneau A qui a des éléments nilpotents non-nuls.
6. Donner un exemple d'anneau A commutatif qui a des éléments nilpotents non-nuls.
7. Montrer que le résultat de 1) est faux si A n'est pas commutatif.
   On cherchera un contre-exemple.
8. Est-ce qu'il existe des anneaux A non-intègres tels que $N = \{0\}$?
9. Montrer que $1 - x$ est inversible, et donner son inverse.
10. Montrer que $1 + N \subset A^\times$.

---

1. L'anneau A est commutatif. On a $(ax)^n = a^n x^n = 0$.
2. Pour n tel que $x^n = 0$, et m tel que $y^m = 0$, on regarde $(x+y)^{n+m}$.
   Par commutativité, la formule du binôme donne $(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}$.
   Pour tout $0 \leq k \leq n+m$, on a soit $k \geq n$ soit $n+m-k \geq m$, donc $(x+y)^{n+m} = 0$.
3. L'ensemble N contient 0, est stable par multiplication par tout élément de A, et est stable par addition.
   C'est donc un idéal de A.
4. Dans un anneau intègre, on a $x^n = 0$ si et seulement si $x = 0$. Donc $N = \{0\}$.
5. Dans $M_2(\mathbb{R})$ on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $M^2 = 0$.
6. Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on a $x = \overline{2}$ qui vérifie $x^2 = 0$.
7. Dans $M_2(\mathbb{R})$ pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a M nilpotente, mais $NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice nilpotente.
8. Oui. Pour $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'anneau A n'est pas intègre (on a $(1,0) \times (0,1) = (0,0)$), mais son seul élément nilpotent est $(0,0)$.
9. Comme on a $x^n = 0$, on a $(1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1}) = 1 - x^n = 1$.
   Et $1-x$ commute avec $1+x+\ldots+x^{n-1}$.
   Donc, $1-x$ est inversible, d'inverse $1+x+\ldots+x^{n-1}$.
10. On a $1+N = \{1+x,\, x \in N\}$.
    Soit $x \in N$. Comme N est un idéal, on a $y = -x$ qui est nilpotent. Donc $1-y = 1+x$ est inversible.
    Ainsi, on a $1+N \subset A^\times$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 3. Dans $M_2(\mathbb{C})$, on pose $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $i^2, j^2, k^2, ij, jk, ik$.
2. Combien valent ijk, et ji, kj, ki ?
3. On pose $A = Vect_{\mathbb{R}}(I_2, i, j, k)$, le sous-ev **réel** engendré par ces 4 matrices.
   Montrer que A est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.
4. Est-ce que A est commutatif ?
5. Soit $x = aI_2 + bi + cj + dk \in A$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   Pourquoi a-t-on $x = 0$ si et seulement si $a = b = c = d = 0$?
   Penser au cours de Géométrie.
6. On pose $\overline{x} = aI_2 - bi - cj - dk$.
   Calculer $x\overline{x}$.
7. Montrer que $A^\times = A^*$.
8. En déduire que l'anneau A est intègre.
9. Résoudre l'équation $x^2 = -1_A$.
   On pourra s'aider de la question 6).
10. L'anneau A est intègre, mais l'équation polynomiale $x^2 = -1_A$ possède plus de 2 solutions dans A.
    Qu'est-ce que cet anneau a de particulier ?

---

1. On trouve $i^2 = j^2 = k^2 = -I_2$. $ij = k$, $jk = i$, $ik = -j$.
2. On a $ijk = (ij)k = k^2 = -I_2$.
   On a $jij = jk = i$, donc $-ji = jij^2 = ij$. Ainsi, $ji = -ij = -k$.
   De même, $jkj = ij = k$, donc $-kj = j^2kj = jk = i$. Ainsi, $kj = -jk = -i$.
   De même, on trouve $ki = -ik = j$.
3. Comme A est un sous-ev de $M_4(\mathbb{R})$, $(A, +)$ est un sous-groupe de $M_4(\mathbb{R})$.
   On a bien $I_2 \in A$.
   Soient $x, y \in A$. D'après les questions précédentes, on a $xy \in A$ (par distributivité, le produit de combinaisons linéaires de I_2, i, j, k est encore une combinaison linéaire de I_2, i, j, k).
   C'est donc bien un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.
4. Cet anneau n'est pas commutatif, on a $ij = -ji \neq ij$.
5. La famille (I_2, i, j, k) est une famille libre de matrices dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
   Donc, on a $aI_2 + bi + cj + dk = 0$ si et seulement si $a = b = c = d = 0$. (Cela vient du chapitre e.v. en Géométrie 1)
6. Avec les premières questions, on trouve que $x\overline{x} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_2$.
7. On a $A^\times \subset A^*$. Montrons l'inclusion réciproque.
   Soit $x \in A^*$. On a $x = aI_2 + bi + cj + dk$.
   D'après la question précédente, on a donc un des coefficients a, b, c, d qui est non-nul.
   Donc, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.
   En posant $y = \overline{x}\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}$, on a $xy = I_2$.
   D'après le cours d'Algèbre 1 (chapitre Matrices), on sait directement que la matrice x est inversible, d'inverse y (pas besoin de calculer yx).
   Comme $y \in A$, on a donc $x \in A^\times$ (l'inverse de x est bien un élément de A).
   Donc, on a $A^\times = A^*$.
8. Soient $x, y \in A$.
   Si $x, y \neq 0$, alors x et y sont inversibles, donc xy est inversible, donc $xy = 0$.
   Ainsi, on a $xy = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$.
   Donc, l'anneau A est intègre.

9. Soit $x \in A$ tel que $x^2 = -1_A = -I_2$.
On a alors $x(-x) = I_2$, donc x est inversible d'inverse $-x$. Or, on a vu que l'inverse de x est $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\overline{x}$.
On a donc $-x = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\overline{x}$.
Comme la famille (I_2, i, j, k) est libre, cela est équivalent aux 4 équations : $-a = \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et $-b = \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et $-c = \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et $-d = \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2}$.
Cela est équivalent à $a = 0$ et $1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = b^2 + c^2 + d^2$.
Ainsi, on a $x^2 = -I_2$ si et seulement si $x = bi + cj + dk$ avec $b^2 + c^2 + d^2 = 1$.
Remarque : D'un point de vue géométrique, l'ensemble des racines carrées de $-I_2$ dans A forme une sphère. On peut paramétrer cet ensemble avec $(\cos(t), \sin(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s))$, pour $s, t \in [0, 2\pi[$.
10. L'équation polynomiale de degré 2 $x^2 = -1_A$ possède une infinité de solutions.
Cela ne contredit pas le cours d'Algèbre 2, car l'anneau A est intègre mais est **non commutatif**.

Une équation polynômiale comme $(x-i)(x+i) = 0$ possède exactement 2 solutions dans un anneau intègre.
Mais, comme A n'est pas commutatif, x ne commute pas avec i en général. Cette équation est équivalente à $x^2+xi-ix-i^2 = 0$, et en général on a $x^2+xi-ix-i^2 \neq x^2-i^2 = x^2+1_A$.
Ainsi, l'équation polynômiale $x^2+1_A = 0$, qui est aussi $x^2-i^2 = 0$, n'est pas équivalente à $(x-i)(x+i) = 0$.
Le calcul dans les anneaux non commutatifs est beaucoup plus compliqué que dans les anneaux commutatifs. C'est pour cela que le cours étudie surtout les anneaux commutatifs. On commence par le plus simple avant d'aller au plus difficile.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 4. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une BON de P. Si $k \in \mathbb{R}$, on note f_k l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & \frac{3k}{2} \\ k + \frac{1}{5} & -2k \end{pmatrix}.$$

À quelle condition sur k l'endomorphisme f_k est-il orthogonal ? Dans ce cas, caractériser géométriquement f_k.

Puisque $\mathcal{B}$ est une BON, f_k est un endomorphisme orthogonal si et seulement si $A_k \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Or

$${}^tA_k A_k = \begin{pmatrix} 5k^2 + \frac{2k}{5} + \frac{1}{25} & k^2 - \frac{2k}{5} \\ k^2 - \frac{2k}{5} & \frac{25}{4}k^2 \end{pmatrix}.$$

Donc si $A_k \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, on doit avoir $\frac{25}{4}k^2 = 1$, c'est-à-dire $k = \pm\frac{2}{5}$, et $k^2 - \frac{2k}{5} = 0$, donc finalement $k = \frac{2}{5}$. Réciproquement, si $k = \frac{2}{5}$, le dernier coefficient donne bien 1 et $f_{\frac{2}{5}}$ est donc un endomorphisme orthogonal.
On remarque que $\det A_{\frac{2}{5}} = -1$, donc $f_{\frac{2}{5}}$ est une réflexion. On vérifie que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si et seulement si $x = 3y$, donc $f_{\frac{2}{5}}$ est la réflexion par rapport à l'axe $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit P un plan vectoriel orienté, soient u et v deux vecteurs unitaires de P. Déterminer tous les endomorphismes orthogonaux φ de P tels que $\varphi(u) = v$.

On sait que $\mathcal{O}(P)$ est constitué des rotations et des réflexions. Il existe une seule rotation qui envoie u sur v : c'est la rotation d'angle θ, où θ est l'angle orienté de u à v.
Il reste à déterminer les réflexions qui envoient u sur v.

- Si u et v sont colinéaires, il y a deux possibilités : si $u = v$, la seule réflexion qui envoie u sur u est la réflexion par rapport à l'axe $\mathbb{R}u$; si $v = -u$, la seule réflexion qui envoie u sur $-u$ est la réflexion par rapport à l'axe $(\mathbb{R}u)^{\perp}$.
- Si (u, v) est libre, soit s une réflexion par rapport à un axe $D = \mathbb{R}e_1$, on suppose que $s(u) = v$. Notons e_2 un vecteur (non nul) orthogonal à e_1, soit (u_1, u_2) les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2). On a donc $s(u) = u_1e_1 - u_2e_2$, donc on doit avoir $v = u_1e_1 - u_2e_2$. Ainsi, on obtient $u + v = 2u_1e_1$, donc s est la réflexion par rapport à la droite $\mathbb{R}(u+v)$.
  Réciproquement, si s est la réflexion par rapport à $\mathbb{R}(u+v)$, alors $(u+v, u-v)$ est une base orthogonale de P et on a $u = \frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u-v)$ donc $s(u) = \frac{1}{2}(u+v)-\frac{1}{2}(u-v) = v$.

Exercice 6. Soit P un plan vectoriel orienté. Soit r une rotation de P et s une réflexion de P.

1. Caractériser $s \circ r \circ s$. *"Caractériser" veut dire déterminer quel endomorphisme c'est. Est-ce une rotation ? si oui quel est l'angle ? Est-ce une réflexion ? si oui par rapport à quelle droite ?*
2. Caractériser $r \circ s \circ r$.
3. À quelle condition a-t-on $s \circ r = r \circ s$?

On considère maintenant une réflexion s_1 par rapport à un axe $\mathbb{R}e_1$, avec e_1 unitaire, et une réflexion s_2 par rapport à un axe $\mathbb{R}e_2$, avec e_2 unitaire. On note θ l'angle orienté de e_1 à e_2.

4. Caractériser $s_2 \circ s_1$.
5. À quelle condition a-t-on $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$?

---

1. Puisque $\mathcal{O}(P)$ est un groupe, $s \circ r \circ s$ est un endomorphisme orthogonal. On remarque ensuite que $\det(s \circ r \circ s) = (-1) \times 1 \times (-1) = 1$, donc $s \circ r \circ s$ est une rotation de P. Pour déterminer l'angle, il suffit de regarder l'image d'un vecteur. Notons θ l'angle de la rotation r. Soit e_1 un vecteur unitaire tel que $s(e_1) = e_1$ et e_2 tel que (e_1, e_2) est une BOND, on a
$$s \circ r \circ s(e_1) = s(r(e_1)) = s(\cos\theta e_1 - \sin\theta e_2) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2.$$
Ainsi, $s \circ r \circ s$ est la rotation d'angle $-\theta$, c'est-à-dire r^{-1}.
2. On remarque que $\det(r \circ s \circ r) = -1$, c'est donc une réflexion. D'après la question précédente,
$$s \circ (r \circ s \circ r) = r^{-1} \circ r = \mathrm{Id}_P,$$
donc $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.
3. Si $s \circ r = r \circ s$ alors $r = s^2 \circ r = s \circ r \circ s = r^{-1}$. Donc l'angle de r est 0 ou π, c'est-à-dire que $r = \pm\mathrm{Id}_P$. Réciproquement, si $r = \pm\mathrm{Id}_P$ alors r commute avec toute réflexion.
4. Tout d'abord $s_2 \circ s_1$ est une rotation. Notons $e_1^\perp$ le vecteur unitaire tel que $(e_1, e_1^\perp)$ est une BOND, et $e_2^\perp$ de même. On remarque tout d'abord que
$$\left\{\begin{array}{ll} e_2 & = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_1^\perp \\ e_2^\perp & = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_1^\perp \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} e_1 & = \cos\theta e_2 - \sin\theta e_2^\perp \\ e_1^\perp & = \sin\theta e_2 + \cos\theta e_2^\perp \end{array}\right. .$$
On a donc
$$\begin{aligned} s_2 \circ s_1(e_1) = s_2(e_1) &= \cos\theta e_2 + \sin\theta e_2^\perp \\ &= \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) e_1 + 2\sin\theta\cos\theta e_1^\perp \\ &= \cos(2\theta) e_1 + \sin(2\theta) e_1^\perp. \end{aligned}$$
On en déduit que $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle 2θ.
5. L'angle orienté de e_2 à e_1 est $-\theta$, donc $s_1 \circ s_2$ est la rotation d'angle -2θ. Ainsi, $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ si et seulement si la rotation d'angle 2θ est égale à la rotation d'angle -2θ, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Finalement, deux réflexions commutent si et seulement si leurs axes sont confondus ou orthogonaux.