Feuille de TD n° 11

Sous-anneaux, Idéaux, Endomorphismes orthogonaux

20 mai 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soient I, J deux idéaux de A.
On note $I.J = \{i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n;\ n \geq 1,\ i_k \in I,\ j_k \in J\}$.

1. Montrer que $I.J$ est encore un idéal de A.
2. Montrer que $I.J \subset I \cap J$.
3. Montrer que $(I + J).(I \cap J) \subset I.J$.
4. On dit que deux idéaux I et J sont étrangers si $I + J = A$.
   Pour $A = \mathbb{K}[X]$, donner un exemple d'idéaux étrangers (non-triviaux, $I, J \neq A$).
   Pour $A = \mathbb{Z}$, montrer que pour tout idéal $I \neq \mathbb{Z}, \{0\}$ il existe $J \neq \mathbb{Z}$ tel que I et J sont étrangers.
   Pour $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, donner un exemple d'idéaux étrangers (non-triviaux, $I, J \neq A$).
5. Montrer que si I et J sont étrangers, alors $I.J = I \cap J$.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif. Soit $x \in A$. On dit que x est **nilpotent** s'il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$.

1. Soit $x \in A$ nilpotent, et $a \in A$.
   Montrer que ax est nilpotent.
2. Soit $y \in A$ nilpotent. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. En déduire que $N = \{x \in A \text{ t.q. } x \text{ nilpotent}\}$ est un idéal de A.
4. Quels sont les éléments nilpotents dans un anneau intègre ?
5. Donner un exemple d'anneau A qui a des éléments nilpotents non-nuls.
6. Donner un exemple d'anneau A commutatif qui a des éléments nilpotents non-nuls.
7. Montrer que le résultat de 1) est faux si A n'est pas commutatif.
   On cherchera un contre-exemple.
8. Est-ce qu'il existe des anneaux A non-intègres tels que $N = \{0\}$?
9. Montrer que $1 - x$ est inversible, et donner son inverse.
10. Montrer que $1 + N \subset A^{\times}$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 3. Dans $M_2(\mathbb{C})$, on pose $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $i^2, j^2, k^2, ij, jk, ik$.
2. Combien valent ijk, et ji, kj, ki ?
3. On pose $A = Vect_{\mathbb{R}}(I_2, i, j, k)$, le sous-ev **réel** engendré par ces 4 matrices.
   Montrer que A est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.
4. Est-ce que A est commutatif ?
5. Soit $x = aI_2 + bi + cj + dk \in A$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   Pourquoi a-t-on $x = 0$ si et seulement si $a = b = c = d = 0$?
   Penser au cours de Géométrie.
6. On pose $\overline{x} = aI_2 - bi - cj - dk$.
   Calculer $x\overline{x}$.
7. Montrer que $A^{\times} = A^*$.
8. En déduire que l'anneau A est intègre.
9. Résoudre l'équation $x^2 = -1_A$.
   On pourra s'aider de la question 6).
10. L'anneau A est intègre, mais l'équation polynomiale $x^2 = -1_A$ possède plus de 2 solutions dans A.
    Qu'est-ce que cet anneau a de particulier ?

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 4. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une BON de P. Si $k \in \mathbb{R}$, on note f_k l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & \frac{3k}{2} \\ k + \frac{1}{5} & -2k \end{pmatrix}.$$

À quelle condition sur k l'endomorphisme f_k est-il orthogonal ? Dans ce cas, caractériser géométriquement f_k.

Exercice 5. Soit P un plan vectoriel orienté, soient u et v deux vecteurs unitaires de P. Déterminer tous les endomorphismes orthogonaux φ de P tels que $\varphi(u) = v$.

Exercice 6. Soit P un plan vectoriel orienté. Soit r une rotation de P et s une réflexion de P.

1. Caractériser $s \circ r \circ s$. *"Caractériser" veut dire déterminer quel endomorphisme c'est. Est-ce une rotation ? si oui quel est l'angle ? Est-ce une réflexion ? si oui par rapport à quelle droite ?*
2. Caractériser $r \circ s \circ r$.
3. À quelle condition a-t-on $s \circ r = r \circ s$?

On considère maintenant une réflexion s_1 par rapport à un axe $\mathbb{R}e_1$, avec e_1 unitaire, et une réflexion s_2 par rapport à un axe $\mathbb{R}e_2$, avec e_2 unitaire. On note θ l'angle orienté de e_1 à e_2.

4. Caractériser $s_2 \circ s_1$.
5. À quelle condition a-t-on $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$?