Feuille de TD n° 12

Endomorphismes orthogonaux de l'espace, Anneaux prinipaux

27 mai 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
E est $\mathbb{R}^3$ ou un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in E$ un vecteur non nul, $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel non nul, on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \lambda(u \cdot x)u \end{array}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit un endomorphisme orthogonal de E. Caractériser alors f.

Exercice 2. Caractériser géométriquement les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour aller plus loin . . .

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel orienté $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que si r est une rotation (vectorielle) d'angle non nul, $\mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{Id})$ est l'axe de r.
2. Soit r une rotation (vectorielle, d'angle non nul) et D une droite vectorielle telle que $r(D) = D$. Montrer que soit D est l'axe de r, soit r est une rotation d'angle π et D est orthogonale à l'axe de r.
3. Soit r_1 et r_2 deux rotations (vectorielles, d'angles non nuls) de $\mathbb{R}^3$. On note D_1 l'axe de r_1 et D_2 l'axe de r_2. Montrer que si $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$, on a $r_1(D_2) = D_2$ et $r_2(D_1) = D_1$.
4. À quelle condition r_1 et r_2 commutent-elles ?

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 4. On étudie $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Quelles sont ses propriétés ? (commutatif ? intègre ?)
3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{Z}[i]$.
   En utilisant la fonction $|z|^2 = z\overline{z}$, Montrer que l'on a $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$ ssi $|z| = 1$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$.
5. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z|^2 = p$, avec p premier.
   Montrer que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
6. Soit q un nombre premier, tel que $q \equiv 3 \bmod (4)$. On veut montrer que q est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
   (a) Supposons par l'absurde que q est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
   On écrit alors $q = zz'$, avec z, z' qui ne sont pas inversibles.
   Combien vaut $|z|^2$? Et $|z'|^2$?
   (b) Montrer que pour $z = x + iy$, on a $x, y \neq 0$.
   On pourra démontrer cela par l'absurde.
   (c) Trouver une relation entre $arg(z)$ et $arg(z')$.
   (d) Montrer que $z' = \overline{z}$.
   (e) En déduire que q est la somme de deux carrés.
   Conclure.
7. On admet que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal. (On démontre cela en prouvant qu'il existe une division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$.)
   Dire si les éléments $1 + 2i$, 5, 13, $3 + 4i$, sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
   Si non, donner leur factorisation en produit d'éléments irréductibles.

Exercice 5.

1. Soit A un anneau commutatif et intègre.
   On suppose que A possède au au moins un élément irréductible.
   Montrer que l'anneau A a une infinité d'éléments.
2. Montrer que $B = \{\frac{p}{3^q}, \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ est un anneau commutatif, intègre.
3. Déterminer $B^\times$.
4. Montrer que tout $x = \frac{p}{3^q} \in B$ est associé à un entier n non divisible par 3.
5. Montrer que les éléments irréductibles de B, à association près, sont les nombres premiers de $\mathbb{Z}$ sauf 3.
   On pourra traiter séparément les cas n non premier et n premier.
6. Trouver un anneau commutatif intègre C qui ne possède qu'un nombre fini d'éléments irréductibles.
   On pourra chercher un anneau similaire à B.