Feuille de TD n° 13

Morphismes d'anneaux, Isométries affines

3 juin 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soient A, B des anneaux, et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n.1_A) = n.1_B$.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p.1_A$ est inversible.
   Montrer que $f((p.1_A)^{-1}) = (p.1_B)^{-1}$.
3. Pour le reste de l'exercice, on suppose que A et B contiennent $\mathbb{Q}$.
   Montrer que $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$.
4. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$.
   Montrer que pour tout $x \in A$, on a $f(P(x)) = P(f(x))$.
5. En déduire que si A contient $\sqrt{2}$, alors B contient une racine carrée de 2.

---

1. Si on a $f(n.1_A) = n.1_B$ pour $n \geq 0$, alors on a $f((-n).1_A) = f(-(n.1_A)) = -f(n.1_A) = -(n.1_B) = (-n).1_B$.
   On démontre par récurrence sur $n \geq 0$ que $f(n.1_A) = n.1_B$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $f(0) = 0$.
   Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété vraie pour n.
   On a alors $f((n+1).1_A) = f(n.1_A + 1_A) = f(n.1_A) + f(1_A) = n.1_B + 1_B = (n+1)1._B$.
   Cela termine la récurrence.
2. On pose $x = (p.1_A)^{-1}$.
   On a alors $f((p.1_A).x) = f(1_A) = 1_B$, et $f((p.1_A).x) = f(p.1_A).f(x) = (p.1_B)f(x)$.
   Donc, $p.1_B$ est inversible, d'inverse $f(x)$.
   On a donc $f((p.1_A)^{-1}) = (p.1_B)^{-1}$.
3. Comme A et B contiennent $\mathbb{Q}$, on a $n.1_A = n$, $n.1_B = n$.
   Avec les questions précédentes, on a $f(\frac{p}{q}) = f(p.\frac{1}{q}) = f(p)f(\frac{1}{q}) = p\frac{1}{q} = \frac{p}{q}$.
4. On a $P(X) = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, avec $n \geq 1$ et $a_i \in \mathbb{Q}$.
   Alors, avec les propriétés de f ($f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$) et avec la question précédente, on a : $f(P(x)) = f(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) = \sum_{k=0}^{n} f(a_kx^k) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)f(x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_kf(x)^k = P(f(x))$.
5. On pose $x = \sqrt{2}$. Pour $P(X) = X^2 - 2$, on a $P(x) = 0$.
   Alors, $P(f(x)) = f(P(x)) = f(0) = 0$.
   On a donc $f(x)^2 = 2$.
   Ainsi, dans l'anneau B, il existe un élément y tel que $y^2 = 2$. Cet anneau contient donc une racine carrée de 2.

Exercice 2. Existe-t-il un morphisme d'anneaux entre les anneaux suivants ? Si oui, en donner un. Si non, prouver qu'il n'en existe pas.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour $n \geq 2$
4. $\mathbb{Q}$ et $M_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 2$
5. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$
   Plus durs :
6. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, pour $n, m \geq 2$
7. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $M_2(\mathbb{Q})$

---

1. Oui, $n \in \mathbb{Z} \mapsto n \in \mathbb{Q}$.
   On l'appelle le morphisme d'inclusion. On le note souvent i.
2. Non. Dans $\mathbb{Q}$, pour $x = \frac{1}{2}$, on a $2x = 1$.
   Donc, pour f un morphisme d'anneaux, on aurait $1 = f(1) = f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.
   Or, il n'y a aucun élément y dans $\mathbb{Z}$ tel que $2y = 1$. Un tel morphisme f n'existe non pas.
3. Oui, c'est $f : a \in \mathbb{Z} \mapsto \overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   On a vu que f est un morphisme de groupes. On a $f(1) = \overline{1}$. Et, pour $x, y \in \mathbb{Z}$ on a $\overline{xy} = \overline{x}\overline{y}$.
4. Oui, c'est $f : r \in \mathbb{Q} \mapsto rI_n \in M_n(\mathbb{R})$.
5. Non.
   Pour f un morphisme d'anneaux, on a $f(\overline{n}) = f(n.\overline{1}) = f(\overline{1} + \ldots + \overline{1}) = f(\overline{1}) + \ldots + f(\overline{1}) = n.f(\overline{1})$.
   Or, on a $\overline{n} = \overline{0}$, donc $f(\overline{0}) = 0$.
   D'autre part, on a $f(\overline{1}) = 1$, et $n.f(\overline{1}) = n$.
   Et, dans $\mathbb{C}$, on a $n \neq 0$. Donc un tel morphisme f n'existe pas.

6. Oui, si et seulement si m divise n.
   D'une part, si $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ existe, comme dans la question précédente on aura $0 = f(\overline{n}) = f(n.\overline{1}) = n.\overline{1}$.
   On a $0 = n.\overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n.
   Réciproquement, si $n = mn''$, alors la fonction $f : (a \bmod (mn')) \in \mathbb{Z}/(mn')\mathbb{Z} \mapsto (a \bmod (m)) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est bien définie.
   On peut vérifier que f est bien un morphisme d'anneaux.
7. Oui. On peut prendre $f : a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \mapsto aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $B^2 = 2I_2$. La matrice B est une racine carrée de $2I_2$.
   On peut vérifier que f est bien un morphisme d'anneaux.

Exercice 3. Les anneaux suivants sont-ils isomorphes ?
Si oui, trouver un isomorphisme. Si non, montrer qu'il n'en existe pas.
On pourra utiliser les propriétés des anneaux, leurs groupes des inversibles, et l'exercice précédent.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$
4. $\mathbb{R}$ et l'anneau produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
5. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[i]$
6. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}[A]$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}[A]$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

1. Non, $\mathbb{Z}$ ne contient que 2 éléments inversibles alors que $\mathbb{Q}$ en a une infinité. Un isomorphisme $f : A \to B$ donne une bijection entre $A^\times$ et $B^\times$.
2. Non. Dans $\mathbb{R}$, on a $\sqrt{2}$ qui est une racine de $x^2 - 2 = 0$, alors que dans $\mathbb{Q}$ le polynôme $X^2 - 2$ n'a pas de racines.
   D'après l'exercice précédent, il n'existe pas de morphisme d'anneaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.
3. Non. Dans $\mathbb{C}$ on a i qui est une racine de $x^2 + 10$, alors que dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines.
   D'après l'exercice précédent, il n'existe pas de morphisme d'anneaux $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.
4. Non. L'anneau $\mathbb{R}$ est intègre, et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'est pas intègre.
   Pour $f : A \to B$ un isomorphisme, si A possède des diviseurs de 0, alors B aussi. (Si $ab = 0$ avec $a, b \neq 0$, alors $f(a)f(b) = 0$ avec $f(a), f(b) \neq 0$)
5. Non. Dans $\mathbb{Q}[i]$ on a i qui est une racine de $x^2 + 10$, alors que dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines.
   D'après l'exercice précédent, il n'existe pas de morphisme d'anneaux $f : \mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
   Pourtant, ces deux anneaux sont isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension 2.
6. Oui.
   On a $A^2 = -I_2$. Ainsi, $\mathbb{R}[A] = Vect(I_2, A) = \{xI_2 + yA,\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
   En posant $f(x + iy) = xI_2 + yA$ (c'est-à-dire $f(1) = I_2$ et $f(i) = A$), on montre que f est un morphisme d'anneaux ($f(x - y) = f(x) - f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$).
   La fonction f est de plus bijective, donc f est un isomorphisme d'anneaux.
7. Non.
   On a $B^2 = I_2$, donc l'anneau $\mathbb{R}[B]$ n'est pas intègre car l'équation $z^2 = I_2$ possède au moins 4 solutions.
   Or, $\mathbb{C}$ est un anneau intègre.
   En fait, on a $\mathbb{R}[B]$ isomorphe à $\mathbb{R}^2$. ($(xI_2 + yB) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$).

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 4. On considère le plan affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on note $E = \mathbb{R}^2$ sa direction. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -y + 2 \\ x \end{pmatrix} \end{array}$.

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$.
3. Caractériser $\overrightarrow{f}$.
4. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

---

1. Puisqu'on peut choisir n'importe quel point de référence pour $\overrightarrow{f}$, on choisit O. Si $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(O)f(O + \overrightarrow{u})}$. Or $f(O)$ est le point de coordonnées $(2, 0)$ et si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, alors $f(O + \overrightarrow{u})$ est le point de coordonnées $(-y + 2, x)$. Donc $\overrightarrow{f(O)f(O + \overrightarrow{u})}$ est le vecteur de coordonnées $(-y, x)$. Ainsi $\overrightarrow{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$.
   Il faut retenir en fait que si f est défini par $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{f}$ est simplement donné par $\overrightarrow{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal car sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Donc f est une isométrie.
3. $\overrightarrow{f}$ est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.
4. On résout

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -y+2 & = x \\ x & = y \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1 \\ y & = 1 \end{array} \right. .$$

Ainsi f a unique point fixe A, de coordonnées $(1,1)$.
On voit donc que f est la rotation de centre A et d'angle θ.

Exercice 5. Soit P un plan affine de $\mathbb{R}^3$, de repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Donner l'expression de $t(x,y)$.
2. Soit s la réflexion d'axe $D = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x+y=1\right\}$. Donner l'expression de $s(x,y)$.
3. Soit $f = t \circ s$, donner l'expression de $f(x,y)$.
4. Est-ce que $s \circ t = t \circ s$?
5. Montrer que f est un anti-déplacement du plan P.
6. Déterminer les points fixes de f. Est-ce que f est une réflexion ?
7. Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ est la droite D' d'équation $y+x=3$.
8. En déduire que f est la composée de la réflexion d'axe D' et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que cette composition commute.

---

1. On a $t(x,y) = (x+3, y+1)$.
2. Soit $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in D$, alors $s(M) = A + \overrightarrow{s_D}\left(\overrightarrow{AM}\right)$, où $\overrightarrow{s_D}$ est la réflexion vectorielle d'axe $\overrightarrow{D}$ la droite d'équation $y=-x$. On a alors

$$\overrightarrow{s_D}(x,y) = x\overrightarrow{s_D}(1,0) + y\overrightarrow{s_D}(0,1) = x(0,-1) + y(-1,0) = (-y,-x).$$

Finalement $s(x,y) = (0,1) + \overrightarrow{s_D}(x, y-1) = (1-y, 1-x)$.

3. On obtient alors $f(x,y) = (4-y, 2-x)$.
4. La composée $s \circ t$ donne $s \circ t(x,y) = (-y, -2-x)$, donc s et t ne commutent pas.
5. La partie linéaire de f est l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la BOND $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le déterminant de cette matrice est -1 donc f est un anti-déplacement.
6. On résout

$$f(x,y) = (x,y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x+y & = 4 \\ x+y & = 2 \end{array} \right. ,$$

il n'y a donc aucun point fixe. On en déduit que f n'est pas une réflexion.

7. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y), $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} 4-y-x \\ 2-x-y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x+y & = 4-\lambda \\ x+y & = 2+\lambda \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & = 1 \\ x+y & = 3 \end{array} \right. .$$

Ainsi l'ensemble des points qui vérifient la propriété est la droite D'. On a alors $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{v}$.

8. On a $s_{D'}(x,y) = (3-y, 3-x)$ donc $s_{D'} \circ f(x,y) = (x+1, y-1) = (x,y) + \overrightarrow{v}$. On en déduit que $f = s_{D'} \circ \tau_{\overrightarrow{v}}$. De plus, $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s_{D'} = f$.
On dit que f est une symétrie glissée. Les anti-déplacements du plan sont exactement les réflexions et les symétries glissées.