FEUILLE DE TD N° 13

Morphismes d'anneaux, Isométries affines

3 juin 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soient A, B des anneaux, et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n.1_A) = n.1_B$.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p.1_A$ est inversible.
   Montrer que $f((p.1_A)^{-1}) = (p.1_B)^{-1}$.
3. Pour le reste de l'exercice, on suppose que A et B contiennent $\mathbb{Q}$.
   Montrer que $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$.
4. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$.
   Montrer que pour tout $x \in A$, on a $f(P(x)) = P(f(x))$.
5. En déduire que si A contient $\sqrt{2}$, alors B contient une racine carrée de 2.

Exercice 2. Existe-t-il un morphisme d'anneaux entre les anneaux suivants ? Si oui, en donner un. Si non, prouver qu'il n'en existe pas.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour $n \geq 2$
4. $\mathbb{Q}$ et $M_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 2$
5. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$
   Plus durs :
6. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, pour $n, m \geq 2$
7. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $M_2(\mathbb{Q})$

Exercice 3. Les anneaux suivants sont-ils isomorphes ?
Si oui, trouver un isomorphisme. Si non, montrer qu'il n'en existe pas.
On pourra utiliser les propriétés des anneaux, leurs groupes des inversibles, et l'exercice précédent.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$
4. $\mathbb{R}$ et l'anneau produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
5. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[i]$
6. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}[A]$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}[A]$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 4. On considère le plan affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on note $E = \mathbb{R}^2$ sa direction. Soit f :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -y+2 \\ x \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$.
3. Caractériser $\overrightarrow{f}$.
4. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

Exercice 5. Soit P un plan affine de $\mathbb{R}^3$, de repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Donner l'expression de $t(x, y)$.
2. Soit s la réflexion d'axe $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 1 \right\}$. Donner l'expression de $s(x, y)$.

3. Soit $f = t \circ s$, donner l'expression de $f(x, y)$.
4. Est-ce que $s \circ t = t \circ s$?
5. Montrer que f est un anti-déplacement du plan P.
6. Déterminer les points fixes de f. Est-ce que f est une réflexion ?
7. Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ est la droite D' d'équation $y + x = 3$.
8. En déduire que f est la composée de la réflexion d'axe D' et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que cette composition commute.