Feuille de TD n° 14

10 juin 2022

Pour commencer ...

Exercice 1.
On considère un rectangle $\mathcal{R} = ABCD$ dans le plan, de longueur L et de largeur l, avec $l \neq L$ (donc ce n'est pas un carré). Déterminer le groupe $\text{Is}(\mathcal{R})$ des isométries qui laissent fixe $\mathcal{R}$. Trouver un groupe additif isomorphe à $\text{Is}(\mathcal{R})$.

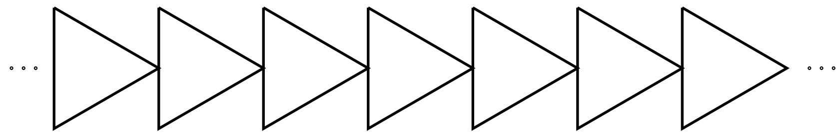
Exercice 2.
On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y - 2z - 2 \\ -2x + 2y - z - 1 \\ x + 2y + 2z + 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Caractériser sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
4. En déduire la nature de f.

Exercice 3. On considère une figure géométrique $\mathcal{F}$ formée d'un nombre infini de triangles équilatéraux de même taille, placés les uns à la suite des autres horizontalement (voir Figure).

1. Déterminer tous les déplacements qui laissent fixe $\mathcal{F}$.
2. En déduire les anti-déplacements qui laissent fixe $\mathcal{F}$.
3. Montrer que $\text{Is}(\mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



Un peu d'Algèbre ...

Exercice 4. Soient $A = \{a + b\sqrt{7},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $B = \{a + b\sqrt{11},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. Démontrer que A et B sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. Montrer que la fonction $\varphi : a+b\sqrt{7} \in A \mapsto a+b\sqrt{11} \in A$ est un morphisme de groupes, mais pas un morphisme d'anneaux.

Exercice 5. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Rappeler la définition de $\mathbb{Q}[J]$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[J] = \{aI_2 + bJ,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   On pourra calculer J^2.
3. Montrer que l'on a $aI_2 + bJ = 0$ ssi $a = b = 0$.
4. L'anneau $\mathbb{Q}[J]$ est-il commutatif, intègre, principal, un corps ?
5. Reprendre les mêmes questions avec $\mathbb{R}[J]$.

Pour aller plus loin ...

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif, intègre. On suppose que A est fini.
Indication : Dans cet exercice, toutes les propriétés de l'anneau A sont utilisées.

1. **Première partie**
   Soit $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n.1_A \in A$. f est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ vers A.
   Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $Ker(f) = p\mathbb{Z}$.
2. Montrer que l'on a $p \neq 0, 1, -1$, et montrer que l'on peut choisir p positif.
3. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $\overline{n} = \overline{m}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   Montrer que dans A on a $n.1_A = m.1_A$.

4. En déduire que la fonction $h : \overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto n.1_A \in A$ est bien définie.
5. Montrer que le nombre entier positif p est premier.
   On pourra raisonner par l'absurde.
   Bonus : Montrer qu'en posant $\overline{n} \cdot a = h(\overline{n}).a \in A$, l'ensemble $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel.
6. Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ev de dimension finie.
7. On pose $r = \dim(A)$. En posant $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de A, calculer $Card(A)$.
8. **Deuxième partie**
   Soit $x \in A$ non-nul. On pose $g_x : a \in A \mapsto ax \in A$.
   Montrer que g_x est une fonction injective.
9. Montrer que x possède un inverse dans A.
10. En déduire que A est un corps.

Conclusion : On vient de démontrer que pour tout anneau A qui est commutatif, intègre, et fini, alors A est un corps et il existe p premier et $r \geq 1$ tels que $Card(A) = p^r$.
En algèbre, un tel corps est noté $\mathbb{F}_{p^r}$. On l'appelle corps fini.
Les corps finis sont très utiles en informatique (par ex : codes correcteurs d'erreurs, cryptographie).