FEUILLE DE TD N° 2

Dénombrement, Bornes supérieure et inférieure

6 MARS 2022

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « ABRACADABRA » ?
2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

---

1. Déterminons le nombre d'anagrammes du mot "ABRACADABRA". Il est constitué de 11 lettres, dont 5 lettres distinctes, A apparaissant 5 fois, B apparaissant 2 fois, R apparaissant 2 fois, C apparaissant 1 fois et D apparaissant 1 fois.
   -1ère méthode : On choisit la position des lettres A. Il y a $\binom{11}{5}$ positions possibles.
   On choisit ensuite la position des lettres B parmi les $11 - 5 = 6$ positions restantes. Il y a alors $\binom{6}{2}$ positions possibles.
   On choisit ensuite la position des lettres R parmi les $11 - 5 - 2 = 4$ positions restantes. Il y a alors $\binom{4}{2}$ positions possibles.
   On choisit ensuite la position de la lettre C parmi les $11 - 5 - 2 - 2 = 2$ positions restantes. Il y a alors $\binom{2}{1} = 2$ positions possibles.
   Il ne reste plus qu'un choix possible pour la lettre D.
   Au total, il y a donc
   $$\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = \frac{11!}{5!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{2!2!} \times \frac{2!}{1!1!} = \frac{11!}{5!2!2!} = 83160$$
   anagrammes possibles.
   -2ème méthode : On numérote les lettres de 1 à 11 afin de les discerner. On peut alors former 11! mots avec ces lettres distinctes. Mais chaque anagramme est alors compté plusieurs fois puisqu'il y a des lettres identiques. Chaque anagramme est compté exactement le nombre de fois qu'il y a de façons de permuter les lettres A, les lettres B et les lettres R, c'est-à-dire 5!2!2!. Il y a donc $\dfrac{11!}{5!2!2!} = 83160$ anagrammes possibles.
2. Pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) à partir du point de coordonnées $(0, 0)$, on se déplace à chaque étape d'une unité vers la droite ou d'une unité vers le haut. On va donc devoir se déplacer au total de p unités vers la droite et de q unités vers le haut. *Faire un petit dessin pour visualiser un chemin possible.* On va donc se déplacer de $p + q$ unités, dont p unités vers la droite et q unités vers le haut. Un chemin peut donc être vu comme un mot à $p + q$ lettres, constituées des lettres D (déplacement vers la droite) et H (déplacement vers le haut). On peut donc choisir les positions des p lettres D parmi les $p + q$ positions : $\binom{p+q}{p}$. La position des lettres q est alors imposée.
   Il y a donc $\dbinom{p+q}{p} = \dbinom{p+q}{q}$ chemins possibles.

Exercice 2.

Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10, 10 boules jaunes numérotées de 1 à 10, 10 boules bleues numérotées de 1 à 10 et 10 boules vertes numérotées de 1 à 10. On tire simultanément sans remise 5 boules dans l'urne. *On ne cherchera pas la valeur numérique des résultats.*

1. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement une boule numérotée 1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement trois boules rouges ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement deux boules jaunes et deux boules bleues ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins deux boules vertes ?
5. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule numérotée 5 et deux boules jaunes ?

Remarquons que le nombre de tirages possibles est $\binom{40}{5}$. En effet, on tire simultanément 5 boules dans l'urne : il n'y a donc pas de répétition et l'ordre n'importe pas. Il s'agit donc d'une 5-combinaison dans $[\![1, 40]\!]$.

1. Dans l'urne, il y a 4 boules avec le numéro 1 (une de chaque couleur).
   On prend une boule parmi les 4 boules numérotées 1, puis 4 boules parmi les $40 - 4 = 36$ boules qui n'ont pas le numéro 1. Il y a donc
   $$\binom{4}{1} \times \binom{36}{4}$$
   tirages possibles.
2. Dans l'urne, il y a 10 boules rouges.
   On prend 3 boules parmi les 10 boules rouges, puis 2 boules parmi les $40 - 10 = 30$ boules qui ne sont pas rouges. Il y a donc
   $$\binom{10}{3} \times \binom{30}{2}$$
   tirages possibles.

3. Dans l'urne, il y a 10 boules jaunes et 10 boules bleues.
On prend 2 boules parmi les 10 boules jaunes, puis 2 boules parmi les 10 boules bleues, puis 1 boule parmi les $40 - 10 - 10 = 20$ boules qui ne sont ni jaunes, ni bleues. Il y a donc
$$\binom{10}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{20}{1}$$
tirages possibles.
4. *Dans cette question, on utilise la formule* $\text{card}(A) = \text{card}(E) - \text{card}(\complement_E A)$ *car il est plus facile de compter le nombre de tirages contenant* 0 *ou* 1 *boule verte.*
Le nombre de tirages contenant au moins deux boules vertes est donc égal au nombre de tirages total moins le nombre de tirages contenant 0 ou 1 boule verte.
Le nombre de tirages contenant 0 boule verte est $\binom{30}{5}$ (on choisit 5 boules parmi les $40 - 10 = 30$ boules qui ne sont pas vertes).
Le nombre de tirages contenant 1 boule verte est $\binom{10}{1} \times \binom{30}{4}$ (on choisit 1 boule parmi les 10 boules vertes, puis 4 boules parmi les $40 - 10 = 30$ boules qui ne sont par vertes.)
Le nombre de tirages contenant 0 ou 1 boule verte (on dit aussi, contenant au plus une boule verte) est donc égal à $\binom{30}{5} + \binom{10}{1} \times \binom{30}{4}$.
Ainsi, le nombre de tirages contenant au moins deux boules vertes est
$$\binom{40}{5} - \binom{30}{5} - \binom{10}{1} \times \binom{30}{4}.$$
5. On va à nouveau dénombrer le complémentaire. On définit A l'ensemble des tirages contenant au moins une boule 5 et B l'ensemble des tirages contenant au moins deux boules jaunes, on veut card $(A \cap B)$. Le complémentaire est alors $A^c \cup B^c$ et on a
$$\begin{aligned}\text{card}\,(A \cap B) &= \binom{40}{5} - \text{card}\,(A^c \cup A^c)\\ &= \binom{40}{5} - \text{card}\,(A^c) - \text{card}\,(B^c) + \text{card}\,(A^c \cap B^c).\end{aligned}$$
   - A^c est l'ensemble des tirages qui ne contiennent pas de 5, il y en a $\binom{36}{4}$.
   - B^c est l'ensemble des tirages qui contiennent 0 ou 1 boule jaune, il y en a $\binom{30}{5} + \binom{10}{1}\binom{30}{4}$.
   - $A^c \cap B^c$ est l'ensemble des tirages qui ne contiennent pas de 5 et qui contiennent 0 ou 1 boule jaune. Il y a $\binom{27}{5}$ tirages qui n'ont ni 5, ni boule jaune. Il y a $\binom{9}{1}\binom{27}{4}$ tirages qui ont une boule jaune et pas de 5.

Finalement,
$$\text{card}\,(A \cap B) = \binom{40}{5} - \binom{36}{4} - 10\binom{30}{4} + \binom{27}{5} + 9\binom{27}{4}.$$

Exercice 3.
Soit E un ensemble à n éléments.
1. (a) Soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$?
(b) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E (ie telles que $X \cap Y = \emptyset$) ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $Y \subset X$?
3. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E qui forment une partition de E ?

---

1. (a) Une partie Y de E telle que $X \cap Y = \emptyset$ est une partie de $E \setminus X$ et réciproquement, toute partie Y de $E \setminus X$ vérifie $Y \cap X = \emptyset$. Autrement dit,
$$\{Y \in \mathcal{P}(E) \mid Y \cap X = \emptyset\} = \mathcal{P}(E \setminus X).$$
Comme $E \setminus X$ est de cardinal $n - p$, il existe 2^{n-p} parties de $E \setminus X$, donc le cardinal de $\{Y \in \mathcal{P}(E) \mid Y \cap X = \emptyset\}$ est égal à $\text{card}(\text{P}(E \setminus X)) = 2^{n-p}$.
Il existe donc 2^{n-p} parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$.
(b) Pour construire un couple (X, Y) de parties disjointes de E, on commence par choisir une partie X de E. Cette partie peut être de cardinal $p = 0$, ou $p = 1$, ou $\ldots$ ou $p = n$.
Fixons $p \in \{0, \ldots, n\}$. Il existe $\binom{n}{p}$ parties X de cardinal p dans E. Il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités pour le choix de X de cardinal p. Puis, pour chaque partie X fixée de cardinal p, on choisit Y telle que $X \cap Y = \emptyset$. D'après la question a), il y a 2^{n-p} possibilités.
Au total, il y a donc $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p}$ possibilités. On reconnaît le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = 2$. Donc $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1 + 2)^n = 3^n$.
Il y a donc 3^n couples (X, Y) formés de parties disjointes de E.
2. Pour construire un couple (X, Y) de parties de E telles que $Y \subset X$, on commence par choisir une partie X de E. Cette partie peut être de cardinal $p = 0$, ou $p = 1$, ou $\ldots$ ou $p = n$.
Fixons $p \in \{0, \ldots, n\}$. Il existe $\binom{n}{p}$ parties X de cardinal p dans E. Il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités pour le choix de X de cardinal p. Puis, pour chaque partie X fixée de cardinal p, on choisit Y telle que $Y \subset X$, autrement dit, Y est une partie de X. X étant de cardinal p, il y a 2^p possibilités pour Y.
Au total, il y a donc $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$ possibilités. On reconnaît le binôme de Newton avec $a = 2$ et $b = 1$. Donc $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = (2 + 1)^n = 3^n$.
Il y a donc 3^n couples (X, Y) de parties de E tels que $Y \subset X$.
3. Le choix de $X \subset E$ détermine automatiquement $Y = E \setminus X$. Tous les choix sont possibles pour X, sauf $X = \emptyset$ et $X = E$. D'où le nombre de partitions égal à $2^n - 2$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 4.
On note S_n^p le nombre de surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$ avec $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$. Déterminer les nombres suivants :

$$S_n^p \text{ pour } p>n,\quad S_n^n,\quad S_n^1,\quad S_n^2 \quad\text{et}\quad S_{n+1}^n.$$

On fixe $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(S_n^p)_p$.

— Si $p>n$, alors il n'existe pas de surjection de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,p\}$ donc $S_n^p=0$.

— Supposons $p=n$. Alors l'ensemble de départ $E=\{1,\dots,n\}$ et l'ensemble d'arrivée $F=\{1,\dots,n\}$ sont finis et de même cardinal n. D'après le cours, les applications surjectives sont donc exactement les applications bijectives. Il existe $n!$ applications bijectives de E sur $F=E$. Donc $S_n^n=n!$.

— Si $p=1$ alors l'ensemble d'arrivée a un unique élément, 1. Donc tout élément de $\{1,\dots,n\}$ est envoyé sur l'élément 1. Il existe donc une unique application surjective, l'application constante égale à 1. Donc $S_n^1=1$.

— Supposons $p=2$. Soit f une application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,2\}$. f n'est pas surjective si et seulement si f est constante égale à 1 ($\mathrm{Im}(f)=\{1\}$) ou si f est constante égale à 2 ($\mathrm{Im}(f)=\{2\}$). Or le nombre d'applications surjectives de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,2\}$ est égal au nombre d'applications de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,2\}$ (il y en a 2^n d'après le cours) moins le nombre d'applications NON surjectives.
Donc $S_n^2=2^n-2$.

— Dire que f est une surjection de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ est équivalent à dire que deux entiers dans $\{1,\dots,n+1\}$ ont la même image $k\in\{1,\dots,n\}$ par f et les autres entiers ont des images distinctes et différentes de k.
Pour construire une surjection de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, on peut donc choisir deux entiers dans $\{1,\dots,n+1\}$, il y a $\binom{n+1}{2}$ possibilités. Puis on choisit la valeur k de l'image commune dans $\{1,\dots,n\}$ à ces deux entiers, il y a n possibilités. Enfin, on choisit les images deux à deux distinctes des $n+1-2=n-1$ autres éléments de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}$. Il y a $(n-1)!$ possibilités.
Au total, il y a donc $\binom{n+1}{2}n\times(n-1)!=\dfrac{n(n+1)}{2}\times n!=\dfrac{n(n+1)!}{2}$ possibilités.
D'où $S_{n+1}^n=\dfrac{n(n+1)!}{2}$.

— L'ensemble des surjections est l'ensemble des fonctions de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ telles que la cardinal de son image est p. Le complémentaire de cet ensemble est donc l'ensemble des fonctions dont l'image a un cardinal strictement plus petit que p (et strictement positif). Soit $k\in[\![1,p-1]\!]$, pour choisir une fonction dont l'image a un cardinal k, on choisit d'abord l'image, c'est-à-dire k éléments parmi p, puis on prend une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans cet ensemble. Ainsi,

$$S_n^p=p^n-\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}S_n^k.$$

Exercice 5. 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in[\![[\![1,n]\!]$, on veut montrer la formule du pion :

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

(a) Montrer (**??**) en utilisant la formule de $\binom{n}{k}$.

(b) Montrer (**??**) en comptant de deux façons différentes le nombre de couples (X,a) tels que $X\subset[\![1,n]\!]$ avec $|X|=k$ et $a\in X$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On veut montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}. \tag{2}$$

(a) Montrer (**??**) en utilisant (**??**).

(b) Montrer (**??**) en dérivant $x\longmapsto(1+x)^n$.

3. Calculer de deux façons la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

---

1. (a) On a

$$k\binom{n}{k}=\frac{k\,n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

(b) La première méthode est de choisir X, on a $\binom{n}{k}$ possibilités, puis choisir a dans X, on a k possibilités. Au total $k\binom{n}{k}$ possibilités.
La deuxième méthode est de choisir d'abord $a\in[\![1,n]\!]$, on a n possibilités, puis de choisir $k-1$ nombres dans $[\![1,n]\!]\setminus\{a\}$ pour compléter X, on a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
Au total $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

2. (a) En utilisant (**??**), on a

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}=n2^{n-1}.$$

(b) D'après la formule du binôme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant, on obtient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1},$$

ce qui donne le résultat pour $x = 1$.

3. — La première méthode est d'utiliser (**??**), qui nous dit que

$$\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1}.$$

Il reste à sommer pour obtenir $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

— La deuxième méthode consiste à intégrer la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$ et à utiliser la formule du binôme.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 6. On considère la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}$ définie par $x \preccurlyeq y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$.
Cette relation est une relation d'ordre (voir TD n°1).

1. Rappeler pourquoi cette relation d'ordre n'est pas totale.
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?
3. Trouver une partie A de $\mathbb{N}$ qui est majorée et minorée pour $\preccurlyeq$. (avec au moins 2 éléments)
4. Trouver une partie A de $\mathbb{N}$ qui est majorée pour $\preccurlyeq$, mais qui n'a pas de maximum.
5. Trouver une partie A de $\mathbb{N}$ qui est non majorée et minorée pour $\preccurlyeq$.

---

1. Il ne s'agit pas d'un ordre total car par exemple, on ne peut pas comparer 2 et 3 : il n'existe pas d'élément $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = 3^n$ ou tel que $3 = 2^n$.
2. Supposons par l'absurde que $\{2, 3\}$ est majorée. Il existe donc $M \in \mathbb{N}$ tel que $2 \preccurlyeq M$ et $3 \preccurlyeq M$. Alors il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $M = 2^n$ et $M = 3^m$. Donc M est à la fois pair et impair, ce qui est absurde. L'ensemble $\{2, 3\}$ n'est donc pas majoré.
3. Toute partie à 1 élément est majorée et minorée. Pour une partie à 2 éléments, $\{2, 4\}$ est majorée par 4 et minorée par 2.
4. La partie $\{2^2 3^2, 2^3 3^3\}$ est majorée par $2^6 3^6$, mais elle n'a pas de maximum.
5. La partie $\{2^k 3^k,\ k \geq 1\}$ est minorée par 6, mais elle n'est pas majorée.

Exercice 7. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E.
Montrer que la partie A admet un plus grand élément si et seulement si elle admet une borne supérieure m telle que $m = \sup(A) \in A$.

Si A possède un maximum, alors A possède une borne supérieure, et on a $\sup(A) = \max(A) \in A$.
Réciproquement, si $\sup(A)$ existe et vérifie $\sup(A) \in A$.
Alors, l'élément $m = \sup(A)$ est un élément de A qui vérifie $a \preceq m$ $\forall a \in A$.
L'élément m est donc un plus grand élément pour A.

Exercice 8. Déterminer les bornes supérieure et inférieure des parties suivantes, après avoir justifié leur existence. Ces parties admettent-elles un maximum ou un minimum ?

1. $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
2. $B = \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \mid (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

---

1. • A est non vide et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, $-1 < (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$, donc A est minoré par -1. Donc A admet une borne inférieure.
1. -1 minore A.
2. Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = (-1)^{2p+1} + \dfrac{1}{2p+2}$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p \in A$ (avec $n = 2p+1 \in \mathbb{N}$) et $u_p = -1 + \dfrac{1}{2p+2}$ tend vers -1 lorsque p tend vers $+\infty$.
Donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(A) = -1$.
A n'admet pas de minimum car sinon, d'après le cours, ce serait $\inf(A) = -1$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} > -1$ donc $-1 \notin A$.

• A est non vide et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \leq 1 + 1 = 2$. Donc A admet une borne supérieure.

1. 2 majore A.
2. On a $(-1)^0 + \dfrac{1}{0+1} = 2$ et $(-1)^0 + \dfrac{1}{0+1} \in A$, donc $2 \in A$.

On en déduit que $2 = \max(A)$ et donc $2 = \sup(A) = \max(2)$.

2. • B est non vide et pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{n} \leq 1$ car $p > 0$ et $n \geq 1$. Donc B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure.
1. 1 majore B.
2. Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{p}$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \in B$ (avec $n = 1$) et $u_p = 1 - \dfrac{1}{p}$ tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$.

Donc, d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\sup(B) = 1$.

B n'a pas de maximum car sinon ce serait $\sup(B) = 1$ et donc $1 \in B$. Or pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} < 1$ donc $1 \notin B$.

• B est non vide et pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} > -\dfrac{1}{p} \geq -1$ car $n > 0$ et $p \geq 1$. Donc B est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure.
1. -1 minore B.
2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in B$ (avec $p = 1$) et $v_n = \dfrac{1}{n} - 1$ tend vers -1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc, d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(B) = -1$.

B n'a pas de minimum car sinon ce serait $\inf(B) = -1$ et donc $-1 \in B$. Or pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} > -1$ donc $-1 \notin B$.

Exercice 9. Soient $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$ deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E. Soit f une application croissante de E dans F, c'est-à-dire, telle que pour tout $(x,y) \in E^2$, si $x \preccurlyeq_E y$ alors $f(x) \preccurlyeq_F f(y)$.

1. Montrer que si $\max(A)$ existe, alors $\max(f(A))$ existe et est égal à $f(\max A)$.
2. Est-ce encore vrai si on remplace les max par des sup ?

---

1. Supposons que $\max(A)$ existe. Il existe donc $a_0 \in A$ tel que $a_0 = \max(A)$ et a_0 majore A.

   Pour tout $a \in A$, on a donc $a \preccurlyeq_E a_0$. f étant croissante, pour tout $a \in A$, $f(a) \preccurlyeq_F f(a_0)$.

   Donc, a étant un élément quelconque de A, $f(a_0)$ majore $f(A)$, et comme $a_0 \in A$, $f(a_0) \in f(A)$.

   D'après la définition du maximum, $f(A)$ admet donc un maximum, égal à $f(a_0)$. Or $a_0 = \max(A)$.

   Donc $\max(f(A)) = f(a_0) = f(\max(A))$.

   D'où le résultat.
2. Le résultat n'est plus vrai si on remplace max par sup. Prenons $(E, \preccurlyeq_E) = (F, \preccurlyeq_F) = (\mathbb{R}, \leq)$ et considérons la fonction E partie entière. Alors E est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $A = [0,1[$. On a $\sup(A) = 1$ et $E(\sup(A)) = E(1) = 1$. De plus, $E(A) = \{0\}$ car E est nulle sur A et donc $\sup(E(A)) = \sup(\{0\}) = 0$.

   Donc $\sup(E(A)) \neq E(\sup(A))$.

   Remarquons qu'ici, A n'admet pas de maximum.