Feuille de TD n° 2

Dénombrement, Bornes supérieure et inférieure

6 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « ABRACADABRA » ?
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 2.
Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10, 10 boules jaunes numérotées de 1 à 10, 10 boules bleues numérotées de 1 à 10 et 10 boules vertes numérotées de 1 à 10. On tire simultanément sans remise 5 boules dans l'urne. *On ne cherchera pas la valeur numérique des résultats.*

1. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement une boule numérotée 1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement trois boules rouges ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement deux boules jaunes et deux boules bleues ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins deux boules vertes ?
5. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule numérotée 5 et deux boules jaunes ?

Exercice 3.
Soit E un ensemble à n éléments.

1. (a) Soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$?
   (b) Combien y a-t-il de couples (X,Y) formés de parties disjointes de E (ie telles que $X \cap Y = \emptyset$) ?
2. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $Y \subset X$?
3. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E qui forment une partition de E ?

Pour aller plus loin . . .

Exercice 4.
On note S_n^p le nombre de surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$ avec $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Déterminer les nombres suivants :

$$S_n^p \text{ pour } p > n, \quad S_n^n, \quad S_n^1, \quad S_n^2 \quad \text{et} \quad S_{n+1}^n.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(S_n^p)_p$.

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1,n]\!]$, on veut montrer la formule du pion :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$
   (a) Montrer (1) en utilisant la formule de $\binom{n}{k}$.
   (b) Montrer (1) en comptant de deux façons différentes le nombre de couples (X,a) tels que $X \subset [\![1,n]\!]$ avec $|X| = k$ et $a \in X$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}. \tag{2}$$
   (a) Montrer (2) en utilisant (1).
   (b) Montrer (2) en dérivant $x \longmapsto (1+x)^n$.
3. Calculer de deux façons la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 6. On considère la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}$ définie par $x \preccurlyeq y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$.
Cette relation est une relation d'ordre (voir TD n°1).

1. Rappeler pourquoi cette relation d'ordre n'est pas totale.
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?
3. Trouver une partie A de $\mathbb{N}$ qui est majorée et minorée pour $\preccurlyeq$. (avec au moins 2 éléments)
4. Trouver une partie A de $\mathbb{N}$ qui est majorée pour $\preccurlyeq$, mais qui n'a pas de maximum.
5. Trouver une partie A de $\mathbb{N}$ qui est non majorée et minorée pour $\preccurlyeq$.

Exercice 7. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E.
Montrer que la partie A admet un plus grand élément si et seulement si elle admet une borne supérieure m telle que $m = \sup(A) \in A$.

Exercice 8. Déterminer les bornes supérieure et inférieure des parties suivantes, après avoir justifié leur existence. Ces parties admettent-elles un maximum ou un minimum ?

1. $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
2. $B = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \mid (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

Exercice 9. Soient $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$ deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E. Soit f une application croissante de E dans F, c'est-à-dire, telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \preccurlyeq_E y$ alors $f(x) \preccurlyeq_F f(y)$.

1. Montrer que si $\max(A)$ existe, alors $\max(f(A))$ existe et est égal à $f(\max A)$.
2. Est-ce encore vrai si on remplace les max par des sup ?