Feuille de TD n° 3

Sup et inf, Groupes, Coefficients binomiaux

18 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Dire si ces ensembles avec ces lois de composition sont des groupes. Si oui, dire s'ils sont commutatifs ou non.

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $(\mathbb{Z}, -)$
3. $(Fonct(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +)$
4. $(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \times)$
5. $(P(E), \cup)$
6. $(P(E), \cap)$
7. $(P(E), \Delta)$, pour $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

Exercice 2.
Construire une loi de composition interne $\star$ sur $G = \{e, a, b\}$ telle que $(G, \star)$ soit un groupe.
On écrira la table des opérations de $\star$.

Exercice 3.
Soit $(G, \star)$ un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$.
Montrer que le groupe G est commutatif.

Exercice 4. Le groupe $\mathfrak{Q}$ des quaternions (\四元群\) est le groupe engendré par deux éléments distincts i et j, dont on note l'élément neutre e (différent de i et j), et qui vérifie les propriéés suivantes :
Pour $k = ij$ et $m = i^2 \neq e$, on a

$$i^4 = j^4 = e,\ i^2 = j^2 = m,\ k = ij = mji.$$

Ainsi, on trouve par exemple $k^2 = mjiij = mj^4 = m$.

1. Montrer que $\mathfrak{Q} = \{e, m, i, i^3, j, j^3, k, k^3\}$ est stable par multiplication : on écrira le tableau de multiplication des éléments de $\mathfrak{Q}$

$\circ$	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
e	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
m	m							
i	i							
i^3	i^3							
j	j							
j^3	j^3							
k	k							
k^3	k^3							

.

2. Vérifier que $\mathfrak{Q}$ est un groupe (on admettra que la loi est associative !).
3. Combien a-t-il d'éléments ?
4. Est-il commutatif ?

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, majorées pour $\leq$.

1. Démontrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Démontrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Démontrer que pour tout $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 6.

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$.

1. Construire une bijection entre l'ensemble des parties de E de cardinaux pairs et l'ensemble des parties de E de cardinaux impairs.
2. Quel est le nombre de parties de E qui ont un cardinal pair ?
3. Retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Exercice 7.

1. Démontrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \ldots + \binom{p-1}{p-1}$.
2. Démontrer que $\displaystyle\binom{p+q}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{p-k}$.

Exercice 8.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note B_n^p le nombre de n-uplets d'entiers naturels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = p$.

1. Calculer B_1^p et B_n^0.
2. Si $n \geq 2$, montrer que $\displaystyle B_n^p = \sum_{k=0}^{p} B_{n-1}^k$.
3. Montrer que $B_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.
4. Retrouver ce résultat en ramenant le problème à la recherche d'anagrammes dans un alphabet à 2 lettres.