Feuille de TD n° 4

Ensembles dénombrables, Permutations, Groupes

22 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Dire si les ensembles suivants sont dénombrables :

1. $\{2^n \mid n \geq 0\}$;
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\, b \in \mathbb{Q}\}$;
4. L'ensemble des nombres premiers ;
5. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. $\mathcal{S}_2$ est-il un groupe abélien ?
2. On considère $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{S}_4$.
   (a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$.
   (b) Écrire ces deux composées comme des transpositions.
   (c) $\mathcal{S}_4$ est-il un groupe abélien ?
   (d) Que valent σ_1^{-1} et σ_2^{-1} ?

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $i,\, j,\, k \in [\![1, n]\!]$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & k \end{pmatrix}$.
2. Calculer $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.
3. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, que vaut $\sigma \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \sigma^{-1}$?

Pour aller plus loin . . .

Exercice 4. *Dans cet exercice, on admet qu'une union dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un ensemble fini, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est au plus dénombrable.*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour tout $x \in]a, b[$, on définit

$$\delta(x) = \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$E_n = \left\{ x \in]a, b[\mid \delta(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 5.
Soient $(G, \star)$ et H un sous-groupe avec $H \neq G$.
Le complémentaire de H est-il un sous-groupe ? Dire pourquoi.
Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de H.

Exercice 6.

1. Pour $(G, \star)$ un groupe, quels sont les éléments de G d'ordre 1 ?
2. Combien vaut $ord(x^{-1})$ en fonction de $ord(x)$?
3. Trouver des matrices de $Gl_3(\mathbb{R})$ d'ordres 2 et 3.
4. Soient $n \geq 2$ et $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. On suppose que M est d'ordre fini.
   Déterminer $ord(M)$.

5. Soit $n \geq 2$. On pose $G = Bij(\{1, \ldots, n\})$. On prend $f \in G$ avec $f(i) = i+1$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $f(n) = 1$.
   Calculer l'ordre de f dans $(G, \circ)$.

Exercice 7. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ est stable pour $\times$, mais que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}, \times)$ n'est pas un groupe.
3. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.
   Montrer que, pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
4. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.