Feuille de TD n° 5

Morphismes de groupes, permutations

1er avril 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Dire si les groupes suivants sont isomorphes ou non. Le prouver.

1. $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$
2. $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{R},+)$
3. $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$
4. $(\mathbb{Z}/2Z)\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et U_8 (racines 8èmes de l'unité)
5. $\mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$ et $\mathcal{S}_n$, $n\geq 2$.
6. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et le groupe $\mathfrak{Q}=\{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ des quaternions ($i^2=-1$, $j^2=-1$,$ij=k=-ij$) (voir TD précédent)
   Pour aller plus loin . . .
7. $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^2,+)$
8. $(\mathbb{Z}^n,+)$ et $(\mathbb{Z}^m,+)$, $n<m$
   On pourra utiliser la base canonique de $\mathbb{Q}^m$ et chercher une contradiction.
9. $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^2,+)$
10. $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^2,+)$. (Pas de preuve demandée.)
11. $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^n,+)$, $n>0$.

Exercice 2.
Soient $(G,\star)$ et (H,Δ) des groupes, et $f:G\to H$ un morphisme de groupes.

1. Soit G_1 un sous-groupe de G. Montrer que $f(G_1)$ est un sous-groupe de H.
2. Soit H_1 un sous-groupe de H. Montrer que $f^{-1}(H_1)$ est un sous-groupe de G.
3. Soit $x\in G$. Montrer que $f(\langle x\rangle)=\langle f(x)\rangle$.
4. Soit $S\subset G$ une partie de G.
   Montrer que $f(\langle S\rangle)=\langle f(S)\rangle$.
5. Soit $S'\subset H$. Montrer qu'en général on a $f^{-1}(\langle S'\rangle)\neq\langle f^{-1}(S)\rangle$.

Exercice 3. Soit G un groupe fini.
Pour tout $a\in G$, on pose $\Phi_a : x\in G\mapsto axa^{-1}\in G$.

1. Vérifier que Φ_a est un automorphisme de G (un isomorphisme de G dans G.
2. Montrer que pour $Aut(G)=\{f:G\to G, f \text{ automorphisme }\}$, $(Aut(G),\circ)$ est un groupe.
3. On pose $I=\{\Phi_a \mid a\in G\}$. Montrer que I est un sous-groupe de $Aut(G)$.
4. Montrer que $h : a\in G\mapsto\Phi_a\in I$ est un morphisme de groupes.
   Déterminer $Ker(h)$.
5. On suppose que G est un groupe commutatif.
   Déterminer I.
6. On suppose que I est un groupe cyclique (engendré par un seul élément, $I=\langle x\rangle$.
   Montrer que G est un groupe commutatif.
7. En déduire que les ensembles I et $Aut(G)$ ne sont en général pas égaux.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 4.
Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints, ainsi qu'en produit de transpositions, calculer leur ordre. Calculer enfin σ_1^{1000} et σ_2^{1000}.

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&4&6&2&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad\sigma_2=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&6&9&7&2&5&8&1&3\end{bmatrix}.$$

Exercice 5.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A \subset \mathcal{S}_n$. On dit que $\mathcal{S}_n$ est engendré (ou généré) par A si tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme un produit d'éléments de A. On a déjà montré dans le cours que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$, …, $\begin{pmatrix}1 & n\end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$, …, $\begin{pmatrix}n-1 & n\end{pmatrix}$.
3. On considère $t = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$. En calculant $c^k t c^{-k}$, montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par t et c.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$. Montrer que les permutations d'ordre 2 ($\sigma^2 = \mathrm{Id}$) dans $\mathcal{S}_n$ sont exactement les produits de transpositions à supports disjoints.