Feuille de TD n° 6

Permutations, Signature,

9 avril 2022

Pour commencer ...

Exercice 1.
Déterminer les orbites et la signature (en utilisant les inversions puis en utilisant une décomposition) des deux permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On note s le nombre total d'orbites de σ. Montrer que la signature de σ est $(-1)^{n-s}$.

Exercice 3.

1. Montrer que les doubles transpositions de la forme $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}$ engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.
2. Montrer que les 3-cycles engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_{2n}.$$

Un peu d'Algèbre ...

Exercice 5. Soit $n \geq 1$.
On pose $\Omega_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \forall k \in [\![1, n]\!], \sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k)\}$.

1. Montrer que Ω_n est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
2. Trouver le cardinal de Ω_n.

Exercice 6. Soit $(G, *)$ un groupe. On note e son élément neutre.

1. Soient $g \in G$ et $k \geq 1$ tels que $x^k = e$.
   Montrer que $ord(x)$ divise k.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et soient $x, y \in G$ d'ordres respectifs m et n.
   On suppose que x et y commutent ($x \star y = y \star x$).
   Quel est l'ordre de $x * y$?
3. On appelle "exposant" de G le plus grand des ordres de ses éléments. On le note $r(G)$.
   (a) Pour $n \geq 1$, déterminer l'exposant du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
   Déterminer l'exposant du groupe produit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que G est un groupe cyclique si et seulement si son exposant est fini et est égal à son cardinal.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$. Soit $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Déterminer l'ordre de $\overline{m}$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
Quels sont tous les ordres possibles ?
Pour chaque ordre r, trouver un élément $\overline{m}$ d'ordre r.