Feuille de TD n° 7

Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, géométrie

15 avril 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Décrire (cardinal, commutatif ou non, cyclique ou non, ordre des éléments) les groupes suivants :

1. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 2. Soit $n\geq 2$.

1. Calculer $\overline{2.3.5.7}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
2. Calculer $(\overline{3})^{6^{30}}$ et $(\overline{2})^{7^5}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
3. Soit $n\geq 2$.
   Calculer $\sum_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x$.
4. On suppose que n n'est pas un nombre premier.
   Calculer $\Pi_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\, x\neq\overline{0}}x$.

Exercice 3.
1. Développer $(x^2+x-\overline{1})(x^2-x-\overline{1})$ et $(x^2+\overline{2})(x^2-\overline{2})$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Développer $(x^2+x-\overline{1})(x^2-x-\overline{1})$ et $(x^2+\overline{2})(x^2-\overline{2})$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
   Que remarque-t-on ?

Exercice 4.
Soient $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

1. Trouver des valeurs de a,b,c telles que $ax+by=c$ n'ait pas de solutions dans $\mathbb{Z}$, mais telles que $\overline{ax}+\overline{by}=\overline{c}$ ait des solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour un certain $n\geq 2$.
2. Soit $n\geq 2$. On s'intéresse à l'équation $\overline{ax}+\overline{by}=\overline{c}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   Si $pgcd(a,n)=1$, montrer que l'équation possède n solutions, que l'on écrira.
3. Si $pgcd(b,n)=1$, montrer que l'équation possède n solutions, que l'on écrira.
4. On suppose que $pgcd(a,n)\neq 1$ et que $pgcd(b,n)\neq 1$. Soit $d=pgcd(a,b,n)$.
   Montrer que si d ne divise pas c, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
5. Donner un exemple.

Exercice 5.
1. Résoudre l'équation diophantienne modulaire : $x\equiv 4 \bmod (6)$ et $x\equiv 7 \bmod 11$.

Trouver un isomorphisme entre les groupes suivants :

1. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4Z\times\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$

On écrira à chaque fois ϕ et sa bijection réciproque ϕ^{-1}.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 6. On considère le plan affine muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. On définit deux droites par une équation cartésienne :

$$(D_1)\,:\,2x-y+1=0 \quad\text{et}\quad (D_2)\,:\,x+y+5=0.$$

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point d'intersection de (D_1) et (D_2), ainsi que par le point A de coordonnées $(-1,2)$.

2. Déterminer la distance du point $M\,(2,3)$ à la droite (D).

Exercice 7 (Lignes de niveau)**.**

1. Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Soit G l'isobarycentre de A, B et C (le centre de gravité du triangle ABC).
   (a) Montrer que pour tout point M du plan,
   $$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$
   (b) En déduire une expression de $GA^2 + GB^2 + GC^2$ en fonction des longueurs AB, AC et BC.
   (c) Soit $k \in \mathbb{R}$, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$?
2. Soient A et B deux points du plan et soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $AM = kBM$.
   Indication : Dans le cas où $k \neq 1$, mettre l'égalité au carré et introduire le barycentre G de $\big\{(A,1),\,(B,-k^2)\big\}$.