FEUILLE DE TD N° 8

Déterminants, Groupes

21 avril 2022

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.

1. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

   Quand le déterminant est nul, vérifier que les colonnes forment une famille liée.

2. Soient a, b, $c \in \mathbb{K}$, calculer les déterminants suivants :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

3. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, calculer

$$A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A.$$

---

1. On obtient $D_1 = 0$ et $D_2 = 0$.
   On peut en effet vérifier que $-(1,2,3) + 2(4,5,6) = (7,8,9)$ et $2(0,1,4) - 4(1,0,2) = (-4,2,0)$.
2. On obtient $D_3 = 2abc$ et $D_4 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
3. Le calcul matriciel donne $(\det A) I_2$. On a donc une formule simple pour A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $f_1 = (2,-1,3)$, $f_2 = (0,1,2)$ et $f_3 = (4,-1,5)$. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

On calcule le déterminant de cette famille dans la base canonique :

$$\det_{\mathcal{C}} (f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

La famille est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soit $p \in \{2,3\}$, soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Que vaut $\det(\lambda M)$?
En déduire que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est anti-symétrique (c'est-à-dire ${}^tM = -M$), le déterminant de M est nul.

En dimension 2,

$$\det(\lambda M) = \det_{\mathcal{C}} (\lambda C_1, \lambda C_2) = \lambda \det_{\mathcal{C}} (C_1, \lambda C_2) = \lambda^2 \det_{\mathcal{C}} (C_1, C_2) = \lambda^2 \det M.$$

Le même calcul montre qu'en dimension 3, $\det(\lambda M) = \lambda^2 \det M$.
On en déduit que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^tM = -M$, on a

$$\det M = \det {}^tM = \det(-M) = (-1)^3 \det M = -\det M.$$

D'où : $\det M = 0$.

Exercice 4. Soient A, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, montrer que

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Que peut-on dire de l'application $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$?

On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{vmatrix} \\ &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\ &= ada'd' + bcb'c' - adb'c' - bca'd' \\ &= ad(a'd' - b'c') + bc(b'c' - a'd') = (ad - bc)(a'd' - b'c'). \end{aligned}$$

Le déterminant est donc un morphisme de groupes entre les matrices inversibles et $\mathbb{K}^*$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes (et les lignes), montrer que

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} &\underset{C_1\leftarrow C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 2a \\ b+c+a & b-c-a & 2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} -1 & 2a & 2a \\ 1 & b-c-a & 2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1\leftarrow C_1-C_2}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -b-c-a & 2b \\ 0 & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2+L_1}{=} (a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Il reste à calculer ce déterminant, ce qui donne 1.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 6.
Soient $(G, \times_G), (H, \times_H)$ deux groupes, et $f : G \to H$ un morphisme de groupes. On suppose que G est un groupe fini.

1. On pose la relation $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$.
   Quelles sont les propriétés de cette relation ?
2. Soit $x \in G$, trouver tous les $y \in G$ tels que $f(x) = f(y)$.
3. En déduire une expression de $Card(f^{-1}(\{z\}))$ en fonction de $Ker(f)$.
4. Combien y a-t-il d'ensembles $f^{-1}(\{z\})$ non-vides différents au total ?
5. En déduire une relation entre les cardinaux de G, $Ker(f)$ et $Im(f)$.

---

1. C'est une relation symétrique, réflexive, transitive. C'est une relation d'équivalence.
2. On a $f(x) = f(y)$ ssi $e = f(y)f(x)^{-1}$ ssi $f(yx^{-1}) = e$ ssi $yx^{-1} \in Ker(f)$ ssi $y \in xKer(f) = \{xg,\, g \in Ker(f)\}$.
3. On a donc $f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$ si $z \notin Im(f)$, et $f^{-1}(\{z\}) = xKer(f)$ s'il existe $x \in G$ tel que $f(x) = z$.
   Donc, $Card(f^{-1}(\{x\})) = 0$ si $z \notin Im(f)$, et $Card(f^{-1}(\{x\})) = Card(Ker(f))$ si $z \in Im(f)$
4. Il y a $Card(Im(f))$ ensembles $f^{-1}(\{z\})$ qui sont non-vides et différents. Ce sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$.
5. Par propriété de $\mathcal{R}$, les classes d'équivalences forment une partition de G. Ces classes ont toutes le même cardinal. Donc, comme G est fini, on obtient : $Card(G) = Card(Ker(f))Card(Im(f))$.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$. On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui ont un inverse pour $\times$.

1. Quels sont les éléments $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$?
2. Montrer que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ est un groupe commutatif.
3. Trouver un produit de groupes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.
4. Trouver un produit de groupes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$.
5. Trouver un produit de groupes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$.

---

1. Ce sont les $\overline{a}$ tels que a est premier avec n.
2. Cet ensemble est stable pour la loi multiplication $\times$. En effet, si a et b sont premiers avec n, alors ab aussi.
   Cet ensemble contient l'élément neutre pour $\times$, qui est $\overline{1}$.
   On sait que la loi $\times$ est associative et commutative.
   Enfin, tout élément de cet ensemble possède un inverse pour $\times$.
   Donc, $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ est bien un groupe commutatif.
3. Ce groupe est $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Il a 6 éléments.
   On montre que $\overline{3}$ est d'ordre 6 pour $\times$. Donc, $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times = \langle\overline{3}\rangle$. Ce groupe est donc un groupe cyclique à 6 éléments. Il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

4. Ce groupe est $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Il a 4 éléments.
   On montre que $\overline{3}, \overline{5}, \overline{7}$ sont d'ordre 2 pour $\times$. Donc, $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2Z) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
5. Ce groupe est $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$. Il a 6 éléments.
   On montre que $\overline{2}$ est d'ordre 6 pour $\times$. Donc, $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times = \langle \overline{2} \rangle$. Ce groupe est donc un groupe cyclique à 6 éléments. Il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.