Feuille de TD n° 9

Anneaux, déterminants

6 mai 2022

Pour commencer ...

Exercice 1.
Pour chaque anneau A, donner son groupe des inversibles $A^\times$, et résoudre (si l'on peut) l'équation $a^2 = 1_A$.

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. $\mathbb{K}[X]$
3. $M_n(\mathbb{K})$
4. $\mathcal{F}(E, \mathbb{C})$, pour E un ensemble.
5. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$

Dans quelle famille d'anneaux l'équivalence "$a^2 = 1_A$ ssi $a = \pm 1_A$" est-elle forcément vraie ?

---

1. $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^*$.
   Dans ces anneaux, on a $a^2 = 1$ ssi $a = \pm 1$.
2. $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^*$. On a $a^2 = 1$ ssi $a = \pm 1$.
3. $M_n(\mathbb{K})^\times = Gl_n(\mathbb{K})$. On a $A^2 = I_n$ ssi $(A - I_n)(A + I_n) = 0$.
   Cette équation possède énormément de solutions. Toutes les matrices diagonales $B = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ sont des solutions.
   Pour toute matrice inversible P, la matrice PBP^{-1} est aussi une solution. En effet on a $(PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1} = PP^{-1} = I_n$.
4. On a $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{C})^\times$ si et seulement si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$. L'ensemble des fonctions inversibles pour $\times$ est donc l'ensemble des fonctions qui ne s'annulent jamais.
   On a $f^2 = 1$ si et seulement si $f(x) = \pm 1$ pour tout $x \in E$.
5. On a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^\times = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$. En effet, on a $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
   On a $a^2 = 1$ ssi $a = \pm 1$.

Si l'anneau A est intègre, on a $a^2 = 1$ ssi $(a-1)(a+1) = 0$ ssi $(a - 1 = 0$ ou $a + 1 = 0)$ ssi $a = \pm 1$.

Exercice 2.
• Donner le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Quel est son cardinal ?
• Donner un isomorphisme de groupes ϕ entre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, \times)$.
On ne demande pas de vérifier que ϕ est bien un isomorphisme de groupes.

Les inversibles sont obtenus à partir des nombres premiers avec 20

$$G = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

C'est un groupe à 8 éléments.
3 est un élément d'ordre 4 dans $(G, \times)$ avec

$$\langle 3 \rangle = \{1, 3, 9, 7\}$$

et 11 est un élément d'ordre 2 n'appartenant pas à $\langle 3 \rangle$.
La fonction $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G$ telle que

$$\varphi(\overline{k}, \overline{\ell}) = 11^k \times 3^\ell$$

est bien définie. On peut montrer que c'est un morphisme de groupes, injectif, entre deux groupes à 6 éléments. C'est donc bien un morphisme de groupes.

Exercice 3. On pose $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. et $\mathbb{Z}[j] := \{a + jb \in \mathbb{C} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
2. Est-ce que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$ est un anneau ? Dire pourquoi.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$.
   Montrer que $z \in \mathbb{Z}[j]^\times \Leftrightarrow |z| = 1$
4. Soit $z = a + jb \in \mathbb{Z}[j]$.
   Montrer que $z \in \mathbb{Z}[j]^\times \Rightarrow (a, b) \in \{-1, 0, 1\}^2$
5. En déduire l'ensemble $\mathbb{Z}[j]^\times$.

---

1. On a $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$ car $j^3 = 1$ et $j \neq 1$.

2. $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$ pour l'addition $+$.
   Dans $\mathbb{C}$, la multiplication $\times$ est associative, admet un élément neutre, et est distributive sur $+$.
   On a $1 \in \mathbb{Z}[j]$ car $1 = 1 + 0j$.
   Et pour tous a, b, a', $b' \in \mathbb{Z}$, on a
   $$(a+jb)(a'+jb') = (aa' - bb') + (ab' + ba' - bb')j \in \mathbb{Z}[j].$$
   Cela montre que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$ est un anneau.
3. On calcule : $|a+jb|^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 + b^2 - ab \in \mathbb{Z}$.
   On en déduit que si $a + jb$ est inversible dans $\mathbb{Z}[j]$, alors $|a+b|^2$, $|a+jb|^{-2} \in \mathbb{Z}$, d'où $|a+jb| = 1$.
   Réciproquement, si $|a+jb| = 1$, alors $(a+jb)^{-1} = \overline{a+jb} = a + \bar{j}b = a - b - bj \in \mathbb{Z}[j]$, car $\bar{j} = j^2 = -1 - j$.
4. On doit résoudre $a^2 - ab + b^2 - 1 = 0$, que l'on considère comme une équation du second degré d'inconnue a.
   On calcule son discriminant : $\Delta = b^2 - 4(b^2-1) = 4 - 3b^2$ qui est positif ssi $b \in \{-1, 0, 1\}$ puisque $b \in \mathbb{Z}$. De même pour a.
5. On a ± 1, $\pm j$, $\pm(1+j) = \pm j^2$ inversibles, soit 6 éléments inversibles. $\pm(1-j)$ et 0 ne sont pas de modules 1 !

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2 + c^2 & = 1 \\ b^2 + d^2 & = 1 \\ ab + cd & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \exists \theta \in [0, 2\pi[, \; a = \cos\theta \text{ et } c = \sin\theta \\ \exists \varphi \in [0, 2\pi[, \; b = \sin\varphi \text{ et } d = \cos\varphi \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \exists \theta \in [0, 2\pi[, \; a = \cos\theta \text{ et } c = \sin\theta \\ \exists \varphi \in [0, 2\pi[, \; b = \sin\varphi \text{ et } d = \cos\varphi \\ \sin(\theta + \varphi) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \exists \theta \in [0, 2\pi[, \; \begin{cases} a = d = \cos\theta \text{ et } c = -b = \sin\theta \\ \text{ou} \\ a = -d = \cos\theta \text{ et } c = b = \sin\theta \end{cases}.$$

Ainsi, il y a deux types de matrices dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$: les matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui sont de déterminant 1, et les matrices $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ qui sont de déterminant -1.

Exercice 5.

1. *Déterminant de Vandermonde* : Soient a, b, $c \in \mathbb{K}$, montrer (avec des opérations sur les lignes ou colonnes) que
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$
2. En déduire une formule factorisée pour
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$

---

1. On a
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(c + a - (b+a)) = (b-a)(c-a)(c-b).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} 2b & c+a & a+b \\ 2b^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ 2b^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_2\leftarrow C_2-C_3+\frac{1}{2}C_1}{=} \begin{vmatrix} 2b & c & a+b \\ 2b^2 & c^2 & a^2+b^2 \\ 2b^3 & c^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_3\leftarrow C_3-\frac{1}{2}C_1}{=} \begin{vmatrix} 2b & c & a \\ 2b^2 & c^2 & a^2 \\ 2b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$
$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2abc(c-a)(b-c)(a-b).$$

Exercice 6.

1. Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$, on pose $a+b+c=2p$.
   (a) Montrer que $\cos b - \cos a\, \cos c = 2\sin p\, \sin(p-b) - \sin a\, \sin c = -2\sin(p-c)\, \sin(p-a) + \sin a\, \sin c$.
   (b) Montrer que
   $$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 4\sin p\, \sin(p-a)\, \sin(p-b)\, \sin(p-c).$$

---

1. On a $\cos a\, \cos c = \cos(a+c) + \sin a\, \sin c$, mais aussi $\cos a\, \cos c = \cos(a-c) - \sin a\, \sin c$. Ensuite $\cos b - \cos(a+c) = 2\sin p\, \sin(p-b)$ et $\cos b - \cos(a-c) = -2\sin(p-c)\, \sin(p-a)$. Il reste à sommer.
2. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1-\cos c\, C_2}{=} \begin{vmatrix} \sin^2 c & \cos c & \cos b \\ 0 & 1 & \cos a \\ \cos b - \cos a\, \cos c & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_3\leftarrow C_3-\cos a\, C_2}{=} \begin{vmatrix} \sin^2 c & \cos c & \cos b - \cos a\, \cos c \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos b - \cos a\, \cos c & \cos a & \sin^2 a \end{vmatrix}$$
$$= \sin^2 a\, \sin^2 c - (\cos b - \cos a\, \cos c)^2$$
$$= (\sin a\, \sin c - (\cos b - \cos a\, \cos c))\, (\sin a\, \sin c + (\cos b - \cos a\, \cos c))$$
$$= 4\sin p\, \sin(p-a)\, \sin(p-b)\, \sin(p-c).$$