Feuille de TD n° 1

Formes bilinéaires et produit scalaire

11 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Etudier les cas d'égalités.

Exercice 3. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(u,v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

- Donner la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- À quelle condition sur a, b, c, d cette forme bilinéaire est-elle symétrique ?
- À quelle condition sur a, b, c et d cette forme bilinéaire est-elle un produit scalaire ?

Exercice 4. Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Montrer que l'on a :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. On considère $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour f strictement positive sur $[a, b]$ on pose :

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

Montrer que l'on a $(b-a)^2 \leq \ell(f)$.
Etudier les cas d'égalités.

Exercice 6. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

Préciser les cas d'égalité.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 de E Montrer que :

$$\forall x, y \in S,\ \text{ si } x \neq y, \text{ alors } \forall t \in \mathbb{R},\ (1-t)x + ty \in S \iff t = 0 \text{ ou } 1.$$

Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel euclidien.
- Montrer que l'on a :

$$\forall x, x' \in E,\ \langle x|y\rangle = \langle x'|y\rangle\ \forall y \in E,\ \text{ si et seulement si } x = x'.$$

- Soit $f : E \to E$ une fonction surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$< f(x) \mid f(y) > = < x \mid y >$$

Montrer que f est une application linéaire.