Feuille de TD n° 10

Lemme des noyaux, diagonalisation

24 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Spec(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

1. Donner la valeur de μ_f. Appliquer le lemme des noyaux à μ_f et f.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que f et g commutent.
3. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.
4. Combien y a-t-il alors d'endomorphismes $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h^2 = f$?

---

1. f possède n valeurs propres, donc μ_f est de degré au moins n. Comme on a aussi $\mu_f \mid \chi_f$, avec $\deg(\chi_f) = n$, on en déduit que $\mu_f(X) = \chi_f(X) = \Pi_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.
On a ainsi $E = \oplus_{i=1}^{n} Ker(f - \lambda_i Id_E)$ d'après le lemme des noyaux.
2. On a $fg = g^3 = gf$. f et g commutent car f est un polynôme en g.
3. Comme f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g. Or, ces sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Ainsi, pour $x \in E$ un vecteur propre de f non-nul, on a $g(x) \in Vect(x)$. Cela veut dire que $g(x) = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc que x est un vecteur propre de g.
4. L'endomorphisme f est diagonalisable. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f. On a alors $Mat_B(f) = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
D'après la question 2, on a $g(e_i) = \gamma_i e_i$. Donc, $Mat_B(g) = Diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.
Vu que $g^2 = f$, cela implique que l'on a $\gamma_i^2 = \lambda_i$, $\forall 1 \le i \le n$.
Vu que g existe, cela veut dire que les valeurs propres de f sont des carrés.
Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, cela veut dire que $\lambda_i \ge 0$ pour tout $1 \le i \le n$.
• Si $\lambda_i > 0$, on a 2 choix possibles pour γ_i.
• Si on a j tel que $\lambda_j = 0$, on a alors forcément $\gamma_j = 0$.
Ainsi, si tous les λ_i sont non-nuls, il existe 2^n endomorphismes h tels que $h^2 = f$. Pour un tel h, on a $Mat_B(h) = Diag(\pm\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n})$.
Sinon, il existe j tel que $\lambda_j = 0$. Il existe alors 2^{n-1} endomorphismes h tels que $h^2 = f$. (2 choix possibles pour les $n-1$ autres valeurs propres)

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $\mathrm{Ker}(u \circ (u - \mathrm{Id}))$ et $\mathrm{Ker}(u \circ (u + \mathrm{Id}))$ soient supplémentaires. Montrer que u est une symétrie vectorielle.

On pose $F = Ker(u^2 - u)$ et $G = Ker(u^2 + u)$.
L'endomorphisme induit u_F est annulé par $X^2 - X = X(X-1)$, et l'endomorphisme induit u_G est annulé par $X^2 + X = X(X+1)$.
Donc, sur $E = F + G)$, u est annulé par $X(X-1)(X+1)$. On a $u(u^2 - Id_E) = 0$.
Pour montrer que u est une symétrie, il faut montrer que $u^2 - Id_E = 0$.
D'après le Lemme des noyaux, on a :
$F = Ker(u) \oplus Ker(u - Id_E)$ et $G = Ker(u) \oplus Ker(u + Id_E)$. Comme $F \oplus G$, on a $F \cap G = \{0\}$.
Cela implique que $Ker(u) = \{0\}$. En utilisant à nouveau le Lemme des noyaux, on obtient :

$$E = Ker(u(u^2 - Id_E)) = Ker(u) \oplus Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E) = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E) = Ker(u^2 -$$

et donc $u^2 - Id_E = 0$.

Autre méthode : Comme $Ker(u) = \{0\}$, on sait alors que u est inversible. Donc, $u(u^2 - Id_E) = 0$ implique que $u^2 - Id_E = 0$.

Exercice 3.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$ une décomposition en somme directe de E, avec F_i des sous-espaces stables par u.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si les endomorphismes induits u_{F_i} sont diagonalisables.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^2 est diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$. (On pourra utiliser la première question)
3. Trouver un contre-exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $k \ge 2$. Montrer que $Ker(A^k) = Ker(A)$ si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
5. On suppose maintenant qu'il existe $k \ge 2$ tel que A^k est diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.

---

1. Si u est diagonalisable, alors tous les endomorphismes induits u_{F_i} le sont d'après le cours.
   Réciproquement, si les u_{F_i} sont diagonalisables, alors il existe des bases B_i de F_i formées de vecteurs propres pour les endomorphismes induits u_{F_i}.
   Ces vecteurs propres sont aussi des vecteurs propres de u.
   Comme $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$, la famille $B = \cup_i B_i$ est une base de E, et cette base est formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.
2. Comme A^2 est diagonalisable, alors pour $Spec(A^2) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, et $F_i = Ker(A^2 - \lambda_i I_n)$, on a $\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^r F_i$.
   Les sous-espaces F_i sont de la forme $Ker(P(A))$, donc ils sont stables par A. D'après la question 1), la matrice A est diagonalisable si et seulement si sa restriction à chaque sous-espace F_i est diagonalisable.
   On pose $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme associé à A. Sur le sous-espace F_i, un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit u_{F_i} est $X^2 - \lambda_i$.
   • Si $\lambda_i \neq 0$, alors ce polynôme est scindé à racines simples. Donc u_{F_i} est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc il est diagonalisable.
   • si tous les λ_i sont non-nuls, on a alors $Ker(A^2) = Ker(A) = \{0\}$, et A est bien diagonalisable.
   • S'il existe j tel que $\lambda_j = 0$, on a $X^2 - \lambda_j = X^2$. Donc le polynôme X^2 annule u_{F_j}.
   La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si u_{F_j} est diagonalisable.
   L'endomorphisme u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est X. C'est-à-dire, si et seulement si $u_{F_j} = 0$. C'est-à-dire si et seulement si $F_j = Ker(A^2) \subset Ker(A)$.
   Or, comme on a toujours $Ker(A) \subset Ker(A^2)$, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique est X^2+1, mais on a $A^2 = -I_2$, qui est diagonalisable.
   Dans $\mathbb{R}$ il existe des polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines.
4. Si $Ker(A) = Ker(A^2)$, d'après les propriétés sur l'indice d'un endomorphisme, on sait que $Ker(A^k) = Ker(A)$ pour tout $k \geq 2$.
   Réciproquement, supposons que $Ker(A^k) = Ker(A)$ pour un $k \geq 2$. Comme on a $Ker(A) \subset Ker(A^2) \subset Ker(A^k)$, on en déduit que $Ker(A) = Ker(A^2)$.
5. On refait le même raisonnement qu'à la question 2).
   Comme A^k est diagonalisable, alors pour $Spec(A^k) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, et $F_i = Ker(A^k - \lambda_i I_n)$, on a $\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^r F_i$.
   Les sous-espaces F_i sont de la forme $Ker(P(A))$, donc ils sont stables par A. D'après la question 1), la matrice A est diagonalisable si et seulement si sa restriction à chaque sous-espace F_i est diagonalisable.
   On pose $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme associé à A. Sur le sous-espace F_i, un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit u_{F_i} est $X^k - \lambda_i$.
   • Si $\lambda_i \neq 0$, alors ce polynôme est scindé à racines simples. Donc u_{F_i} est annulé par un polynôme scindé à racines simples, donc il est diagonalisable.
   • si tous les λ_i sont non-nuls, 0 n'est pas une valeur propre pour A^k et pour A. On a alors $Ker(A^2) = Ker(A) = \{0\}$, et A est bien diagonalisable.
   • S'il existe j tel que $\lambda_j = 0$, on a $X^k \lambda_j = X^k$. Donc le polynôme X^k annule u_{F_j}.
   La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si u_{F_j} est diagonalisable.
   L'endomorphisme u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, u_{F_j} est diagonalisable ssi son polynôme minimal est X. C'est-à-dire, si et seulement si $u_{F_j} = 0$. C'est-à-dire si et seulement si $F_j = Ker(A^k) \subset Ker(A)$.
   Or, comme on a toujours $Ker(A) \subset Ker(A^k)$, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^k)$, ssi $Ker(A) = Ker(A^2)$.

Exercice 4. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, On écrit $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_u(\lambda_i)} Q(X)$, avec Q un polynôme sans racines.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que vaut $Q(X)$?
   Si u est diagonalisable, que vaut $Q(X)$?
2. On pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.
   Montrer que l'endomorphisme induit u_{F_i} est de la forme :
   $$u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i, \text{ avec } n_i \text{ nilpotent.}$$
3. On note $r(n_i)$ l'indice de nilpotence de n_i. Quel autre nombre entier est égal à $r(n_i)$?
4. On suppose que $Q(X) = 1$. Montrer alors que $u = d + m$, avec d endomorphisme diagonalisable et m endomorphisme nilpotent, $dm = md$, et d, m des polynômes en u. (On pourra commencer par trouver des polynômes en u qui conviennent.)

---

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a alors $Q(X) = 1$. Le seul polynôme unitaire et non-nul de $\mathbb{C}[X]$ qui n'a pas de racines est 1.
   Si u est diagonalisable, alors χ_u est scindé, donc $Q(X) = 1$.
2. Par définition, on a $n_i = u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i}$.
   Comme $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$, on remarque que le polynôme $(X)^{m_u(\lambda_i)}$ est un polynôme annulateur de n_i, donc n_i est un endomorphisme nilpotent.
   Et on a alors $u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i$.
3. L'indice de nilpotence de n_i est l'indice de nilpotence de $u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i}$.
   Comme $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$, on sait d'après le cours que l'indice de nilpotence de n_i est égal à l'indice de $u - \lambda_i Id_E$, et cet indice est égal à la multiplicité de la racine λ_i dans $\mu_u(X)$.
4. Si $Q(X) = 1$, alors on a $E = \oplus_{i=1}^r F_i$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et d'après le lemme des noyaux.

Soit $p_i \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F_i parallèlement à $\oplus_{j\neq i} F_j$.
D'après le lemme des noyaux, p_i est un polynôme en u.
On pose $d = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r$.
On pose alors $m = u - d$. Comme les p_i sont des polynômes en u, l'endomorphisme d est un polynôme en u, et l'endomorphisme m aussi.
On a donc que $dm = md$ car deux polynômes en u commutent.
De plus, les sous-espaces F_i sont des sous-espaces stables par u, donc par d et par m (car ce sont des polynômes en u).
Sur le sous-espace F_i, on a

$$d_{F_i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (p_j)_{F_i} = \lambda_i (p_i)_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i}.$$

De même, on obtient que

$$m_{F_i} = u_{F_i} - d_{F_i} = u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i} = n_i.$$

Donc, sur chaque sous-espace F_i on a d_{F_i} diagonal et m_{F_i} nilpotent.
Le polynôme minimal de d_{F_i} est $X - \lambda_i$, et le polynôme minimal de m_{F_i} est $X^{r(n_i)}$.
Donc, sur $E = \oplus_i F_i$, l'endomorphisme d est annulé par $(X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_r)$. Cet endomorphisme est donc diagonalisable. L'endomorphisme m est annulé par $X^{\max(r(n_1),\ldots,r(n_r))}$, donc il est nilpotent.
On a bien trouvé que $u = d + m$ avec d et m qui conviennent.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n.

1. On suppose qu'il existe un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.
Montrer que A est inversible et que A et B commutent.
2. Si A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$ et $A = BQ(B)$. (On pourra exprimer $B, B^2, \ldots$ en fonction de $A, A^2, \ldots$)

---

1. On peut donc écrire

$$AB = P(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + I_n$$
$$A\left(B - \left(\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)\right) = I_n$$

d'où , A est inversible et $A^{-1} = B - \left(\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n\right)$.
Puisque A commute avec A^{-1} et ses puissances, on en déduit que A commute avec

$$B = A^{-1} + \alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I$$

2. Comme A est nilpotente, on a $\mu_A(X) = X^p$, et donc $A^p = O_n$. En écrivant $P(X) = a_0 + \ldots + a_m X^m$, avec $m \geq p$ (et éventuellement $\deg(P) < m$), la relation $B = AP(A)$ donne,

$$B = A + a_2 A^2 + \cdots + a_{p-1} A^{p-1},$$

car $A^p = A^{p+1} = \ldots = 0$. On en déduit qu'il existe des coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que

$$B^2 = A^2 + a_{3,2} A^3 + \cdots + a_{p-1,2} A^{p-1}$$
$$\ldots$$
$$B^{p-2} = A^{p-2} + a_{p-1,p-2} A^{p-1}$$
$$B^{p-1} = A^{p-1}$$

Comme $\mu_A(X) = X^p$, la famille $(A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est libre, et est une base de $Vect(A, \ldots, A^{p-1})$.
Ainsi, la famille $(B, B^2, \ldots, B^{p-1})$ est une famille échelonnée dans la base $(A, A^2, \ldots, A^{p-1})$. Cette famille est donc libre. C'est donc aussi une base de $Vect(A, \ldots, A^{p-1})$.
Ainsi, il existe des nombres $b_1, \ldots, b_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = b_1 B + b_2 B^2 + \cdots + b_{p-1} B^{p-1}$$

ce qui détermine un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $A = BQ(B)$.
Avec l'écriture $B = AP(A)$, on en déduit que $A^k = 0$ implique $B^k = A^k.P(A)^k = 0$.
Avec l'écriture $A = BQ(B)$ on en déduit que $B^k = 0$ implique $A^k = B^k.Q(B)^k = 0$.
Donc, l'indice de nilpotence de A est égal à l'indice de nilpotence de B. Cela implique que $b_1 = Q(0) \neq 0$ (car sinon A serait un multiple de B^2, dont l'indice de nilpotence est strictement inférieur à celui de B).

Exercice 6.

1. Soient E un ev de dim n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
Montrer que l'on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$, pour tout $1 \leq k \leq n$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Soit $Spec(v) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.
On suppose que pour un $1 \leq i \leq r$, on a $\dim(Ker(v - \lambda_i Id)) > 1$.
Montrer que μ_v est un diviseur strict de χ_v.
3. Donner un exemple à 2) dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

---

1. Soit r l'indice de nilpotence de u.
On sait ainsi que la suite des $\dim(Ker(u^k))$ est une suite d'entiers strictement croissante pour $0 \leq k \leq r$, puis constante.
Comme u est nilpotent, on a $\dim(Ker(u)) \geq 1$.
On en déduit donc que pour $1 \leq k \leq r$, on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$.
D'après le cours, on a $u^r = 0$, donc $\dim(Ker(u^r)) = n$.
Ainsi, pour tout $r \leq k \leq n$, on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$.

2. On suppose par l'absurde que $\mu_v = \chi_v$.
   Soit a_i la multiplicité de la racine λ_i dans $\mu_v(X)$.
   On doit alors avoir $a_i = m_v(\lambda_i)$.
   On pose $F = Ker((v - \lambda_i Id_E)^{a_i})$. On sait d'après le cours que $Ker((v - \lambda_i Id_E)^{a_i})$ est de dimension $m_v(\lambda_i)$.
   D'après le cours, sur F, l'endomorphisme $v_F - \lambda_i Id_F$ est nilpotent d'indice a_i.
   Comme $a_i = m_v(\lambda_i)$, on voit donc que $\dim(Ker(v_F - \lambda_i Id_F)^{a_i})) = a_i$.
   Avec l'indice de nilpotence, cela implique aussi que la suite des $\dim(Ker((v_F - \lambda_i Id_F)^k))$ est strictement croissante pour $1 \leq k \leq a_i$.
   Or, on a par hypothèse que $\dim(Ker(v_F - \lambda_i Id_F)) = \dim(Ker(v - \lambda_i Id_E)) > 1$.
   Ces dimensions donnent donc a_i entiers distincts, et ces entiers sont compris entre 2 et a_i.
   Cela est impossible.
   Donc, on a $\mu_v \neq \chi_v$.
3. Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = (X - \lambda)^2(X - 1)$ et $\mu_A(X) = (X - \lambda)(X - 1)$.