Feuille de TD n° 10

Lemme des noyaux, diagonalisation

24 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Spec(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

1. Donner la valeur de μ_f. Appliquer le lemme des noyaux à μ_f et f.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que f et g commutent.
3. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.
4. Combien y a-t-il alors d'endomorphismes $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h^2 = f$?

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $\mathrm{Ker}(u \circ (u - \mathrm{Id}))$ et $\mathrm{Ker}(u \circ (u + \mathrm{Id}))$ soient supplémentaires. Montrer que u est une symétrie vectorielle.

Exercice 3.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ une décomposition en somme directe de E, avec F_i des sous-espaces stables par u.
   Montrer que u est diagonalisable si et seulement si les endomorphismes induits u_{F_i} sont diagonalisables.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^2 est diagonalisable.
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
   (On pourra utiliser la première question)
3. Trouver un contre-exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $k \geq 2$. Montrer que $Ker(A^k) = Ker(A)$ si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.
5. On suppose maintenant qu'il existe $k \geq 2$ tel que A^k est diagonalisable.
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.

Exercice 4. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, On écrit $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_u(\lambda_i)} Q(X)$, avec Q un polynôme sans racines.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que vaut $Q(X)$?
   Si u est diagonalisable, que vaut $Q(X)$?
2. On pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.
   Montrer que l'endomorphisme induit u_{F_i} est de la forme :
   $$u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i, \text{ avec } n_i \text{ nilpotent.}$$
3. On note $r(n_i)$ l'indice de nilpotence de n_i. Quel autre nombre entier est égal à $r(n_i)$?
4. On suppose que $Q(X) = 1$. Montrer alors que $u = d + m$, avec d endomorphisme diagonalisable et m endomorphisme nilpotent, $dm = md$, et d, m des polynômes en u. (On pourra commencer par trouver des polynômes en u qui conviennent.)

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n.

1. On suppose qu'il existe un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.
   Montrer que A est inversible et que A et B commutent.
2. Si A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$.
   Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$ et $A = BQ(B)$. (On pourra exprimer $B, B^2, \dots$ en fonction de $A, A^2, \dots$)

Exercice 6.

1. Soient E un ev de dim n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
   Montrer que l'on a $\dim(Ker(u^k)) \geq k$, pour tout $1 \leq k \leq n$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Soit $Spec(v) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.
   On suppose que pour un $1 \leq i \leq r$, on a $\dim(Ker(v - \lambda_i Id)) > 1$.
   Montrer que μ_v est un diviseur strict de χ_v.
3. Donner un exemple à 2) dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.