Feuille de TD n° 11

Diagonalisation, trigonalisation

3 décembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. 1. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A quel autre entier est égal $\dim(\mathbb{K}[B])$?

2. Pour $\lambda \in Spec(B)$, on écrit $\mu_B(X) = (X-\lambda)^k Q(X)$, avec $Q(\lambda) \neq 0$.
A quel autre entier est égal $\dim(Ker((B-\lambda I_n)^k))$?
3. Peut-on avoir $\dim(Ker((B-\lambda I_n)^k)) > \dim(\mathbb{K}[B])$?
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1. Soit $n \geq \deg(P)$. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mu_A = P$?
A-t-on le même résultat pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

---

1. On a $\dim(\mathbb{K}[B]) = \deg(\mu_B)$. En effet, $\mathbb{K}[B]$ est un sous-ev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont une base est de la forme $(I_n, B, \dots, B^{r-1})$. La dimension de ce sous-espace est égale au premier entier r tel que B^r est combinaison linéaire des B^i, $i < r$. Cela correspond avec le degré du polynôme minimal de B.
2. D'après le cours, k est l'indice de la matrice $(B-\lambda I_n)$, et $Ker((B-\lambda I_n)^k)$ est un sous-espace caractéristique de B. Sa dimension est égale à $m_B(\lambda)$, la multiplicité de $(X-\lambda)$ dans χ_B.
3. Oui, ces deux entiers ne sont pas fortement reliés. Par exemple pour $B = 0$ on a $\mu_B(X) = X$ et $\dim(Ker(B)) = n > 1 = \dim(\mathbb{K}[B])$.
4. Si P n'est pas unitaire, non.
On écrit $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} \dots + a_0$.
Sur $\mathbb{C}$, la réponse est oui, grâce aux propriétés de $\mathbb{C}$.
Le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé, donc il possède au moins une racine λ.
On prend alors $A = Diag(C_P, \lambda I_{n-m})$, où C_P est la matrice compagnon du polynôme P.
D'après le cours, le polynôme minimal de C_P est P. Le polynôme minimal de λI_{n-m} est $X - \lambda$.
D'après des exercices d'un TD précédent (et le cours), on a $\mu_A = ppcm(P(X), (X-\lambda)) = P(X)$.
Sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, l'énoncé est faux en général. Si le polynôme P n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$, non seulement la construction précédente ne marche pas, mais on peut construire des contre-exemples.
Si on prend $n = \deg(P) + 1$, supposons par l'absurde avoir $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mu_A(X) = P(X)$.
Si n est un multiple de $\deg(P)$, il est facile de construire une matrice A telle que $\mu_A = P$, mais pour certaines valeurs de n cela ne peut pas marcher.
On a χ_A de degré $n = \deg(P) + 1$ et $\mu_A \mid \chi_A$, donc on a $\chi_A(X) = P(X)(X-\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.
Cela implique que λ est une valeur propre de A, donc une racine de μ_A. Mais $\mu_A = P$ n'a pas de racines, contradiction.

Exercice 2. Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$, avec $M \neq O$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
2. Montrer que A et B ont une valeur propre en commun.

---

1. On a $A^2M = AMB = MB^2$ et ainsi de suite. On obtient par récurrence que $A^pM = MB^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par linéarité, cela donne $P(A)M = MP(B)$.
2. Considérons $P = \chi_A$. La relation $P(A)M = MP(B)$ entraine $MP(B) = O_n$. Or on a $M \neq O_n$ donc la matrice $P(B)$ n'est pas inversible. On a donc $\det(P(B)) = 0$. Comme on est sur $\mathbb{C}$, on a
$$\chi_A(X) = P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$
avec λ_i valeurs propres de A. Il existe donc $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que
$$\det(\lambda_i I_n - B) = 0$$
Ainsi, A et B ont une valeur propre commune.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^4 = f^2.$$
On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f.
Montrer que f est diagonalisable.

- Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \mathrm{Id}_E$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de

conclure.
- Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres, c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur.
f possède alors $3 = \dim E$ valeurs propres distincts, donc f est diagonalisable.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = O$.
A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
Montrer que $\det(A) = 1$.

On a $(X^3 - X^2 + X - 1)(X+1) = X^4 - 1$. Donc les racines de ce polynôme sont $i, -i, -1$.
A est annulée un polynôme à racines simples, donc A est diagonalisable sur C.
Pour que A soit diagonalisable ou trigonalisable sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit annulée par un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, et en particulier il faut que son polynôme minimal soit scindé.
Comme μ_A divise $X^3 - X^2 + X - 1$, cela implique que $\mu_A(X) = X + 1$, ce qui implique que $A = -I_n$.
Ainsi, si $A = -I_n$ alors A est bien évidemment trigonalisable et diagonalisable. Sinon elle n'est pas diagonalisable ni trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_A(X) = (X+1)^a(X-i)^b(X+i)^c$. Comme A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $Tr(A) = a.1 + b.i + c.(-i)$. Puisque $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$, la multiplicité de i est égale à celle de $-i$, $b = c$.
On a ainsi $\det(A) = 1^a.i^b.(-i)^b = 1$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et u un endomorphisme sur E. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux tels que $(PQ)(u) = 0$. Montrer que l'on a

$$\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Im} P(u) = E.$$

Indice : Bézout.

Les polynômes P et Q étant premiers entre eux, on a donc des polynômes V, W vérifiant

$$PV + QW = 1.$$

En évaluant en u, on obtient la relation

$$\mathrm{Id}_E = P(u) \circ V(u) + Q(u) \circ W(u). \quad (*)$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Im} P(u)$. Puique $Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u) = 0$, on a $\operatorname{Im} P(u) \subset \operatorname{Ker} Q(u)$.
On obtient donc $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$.
La relation $(*)$ donne alors

$$x = V(u) \circ P(u)(x) + W(u) \circ Q(u)(x) = 0_E.$$

Ces deux sous-espaces sont donc en somme directe. Il reste à montrer qu'ils sont supplémentaires (que leur somme donne E tout entier). En reprenant la relation

$$x = V(u) \circ P(u)(x) + W(u) \circ Q(u)(x) = 0_E,$$

On peut remarquer que $(VP)(u)(x) = P(u)(V(u)(x)) \in \operatorname{Im} P(u)$, et que $(WQ)(u)(x) \in \operatorname{Ker} P(u)$ car

$$P(u)((WQ)(u)(x)) = (WPQ)(u)(x) = 0_E.$$

On a donc bien obtenu que $E = Ker(P(u)) \oplus Im(P(u))$.
En fait, on a aussi montré que $Im(P(u)) = Ker(Q(u))$.

Exercice 6. Soit E un ev de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que ces 3 propositions sont équivalentes :

1. $m_u(0) = \dim(Ker(u))$;
2. $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont en somme directe ;
3. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, tel que $P(u) = 0$.

On pourra se concentrer sur le cas où 0 est une valeur propre de u. (Que se passe-t-il sinon ?) Si 0 est une valeur propre de u, on pourra montrer que si l'une de ces propositions est vraies alors l'indice de l'endomorphisme u vaut 1.

Comme $\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(E)$ d'après le théorème du rang, ces deux sous-espaces sont en somme directe si et seulement si on a $E = Ker(u) \oplus Im(u)$.
On rappelle que $Im(u)$ est un sous-ev stable par u.
Si 0 n'est pas une valeur propre de u, on a $m_u(0) = 0 = \dim(Ker(u))$, et $Ker(u) = \{0\}$.
Comme on a $\chi_u(0) \neq 0$, pour $P(X) = X\chi_u(X)$ on a $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, et $P(u) = 0$. On a bien l'équivalence entre les propositions.
On suppose maintenant que 0 est une valeur propre de u. 1) $\Rightarrow$ 2) Comme 0 est une valeur propre de u, on a $\mu_u = X^k Q(X)$, avec $Q(0) \neq 0$ et $k \geq 1$.
On va montrer que $k = 1$. (0 est une racine simple de μ_u)
En effet, d'après le cours, le sous-espace caractéristique associé à 0 est $Ker(u^k)$. Ce sous-espace est de dimension $\mu_u(0)$ (la multiplicité de 0 dans χ_u). L'entier k est l'indice de l'endomorphisme u.
Or, par hypothèse, on a

$$\dim(Ker(u^k)) = m_u(0) = \dim(Ker(u)).$$

D'après les propriétés de l'indice d'un endomorphisme, on sait alors que $k \leq 1$, c'est-à-dire $k = 0$ ou $k = 1$.

Comme 0 est une valeur propre de u, on a $\{0\} = Ker(u^0) \subsetneq Ker(u^1)$, donc l'indice de u vaut 1.
On peut alors appliquer le lemme des noyaux à μ_u et u :

$$E = Ker(\mu_u(u)) = Ker(u) \oplus Ker(Q(u)).$$

Comme 0 n'est pas une racine de $Q(u)$, sur le sous-espace $F = Ker(Q(u))$, l'endomorphisme induit u_F n'a pas 0 pour valeur propre.
Donc, on a u_F inversible, donc $Im(u_F) = F$.
On a ainsi $Im(u) \supset Im(u_F) = F$.
Comme on sait aussi que $\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(E)$ d'après le théorème du rang, et comme $\dim(Ker(u)) + \dim(F) = \dim(E)$, on en déduit que $Im(u) = F$.
On a donc bien montré que $Im(u)$ est en somme directe avec $Ker(u)$.
2) $\Rightarrow$ 1) On montre cela par contrapposée.
On suppose cette fois que $m_u(0) > \dim(Ker(u))$. D'après le cours, on sait alors que $Ker(u^k) \neq Ker(u)$, donc la multiplicité de 0 dans μ_u est strictement supérieure à 1.
Cela veut aussi dire que l'indice de u est strictement supérieur à 1.
On a donc $Ker(u) \subsetneq Ker(u^2)$.
Soit $x \in Ker(u^2) \setminus Ker(u)$. On pose $y = u(x)$.
On a alors $y \neq 0$ car $x \notin Ker(u)$. Par construction, on a $y \in Im(u)$, et $u(y) = u^2(x) = 0$, donc $Im(u)$ et $Ker(u)$ ne sont pas en somme directe. 3) $\Rightarrow$ 1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ dont 0 est une racine simple, et tel que $P(u) = 0$. Alors on a $\mu_u \mid P$. Comme 0 est une valeur propre de u, on en déduit que 0 est une racine simple de μ_u.
On a donc $\mu_u(X) = XQ(X)$, avec $Q(X) \neq 0$.
On obtient donc d'après le cours que $m_u(0) = \dim(Ker(u^1)) = \dim(Ker(u))$.
1) $\Rightarrow$ 3) On a $E = Ker(u) \oplus Im(u)$.
D'après ce que l'on a montré, l'endomorphisme induit $u_{Im(u)}$ est inversible car il n'a pas 0 comme valeur propre. Donc, $\chi_{u_{Im(u)}}$ est un polynôme qui ne s'annule pas en 0.
D'après le cours, le polynôme $P(X) = X\chi_{u_{Im(u)}}(X)$ est un polynôme annulateur de u (il annule u sur $Ker(u)$ et sur $Im(u)$), et 0 est une racine simple de P. Cela conclut.