Feuille de TD n° 11

Diagonalisation, trigonalisation

3 décembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. 1. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A quel autre entier est égal $\dim(\mathbb{K}[B])$?

2. Pour $\lambda \in Spec(B)$, on écrit $\mu_B(X) = (X-\lambda)^k Q(X)$, avec $Q(\lambda) \neq 0$.
   A quel autre entier est égal $\dim(Ker((B-\lambda I_n)^k))$?
3. Peut-on avoir $\dim(Ker((B-\lambda I_n)^k)) > \dim(\mathbb{K}[B])$?
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1. Soit $n \geq \deg(P)$. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mu_A = P$?
   A-t-on le même résultat pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

Exercice 2. Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$, avec $M \neq O$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
2. Montrer que A et B ont une valeur propre en commun.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^4 = f^2.$$

On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = O$.
A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
Montrer que $\det(A) = 1$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et u un endomorphisme sur E. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux tels que $(PQ)(u) = 0$. Montrer que l'on a

$$\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Im} P(u) = E.$$

Indice : Bézout.

Exercice 6. Soit E un ev de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que ces 3 propositions sont équivalentes :

1. $m_u(0) = \dim(Ker(u))$;
2. $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont en somme directe ;
3. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, tel que $P(u) = 0$.

On pourra se concentrer sur le cas où 0 est une valeur propre de u. (Que se passe-t-il sinon ?) Si 0 est une valeur propre de u, on pourra montrer que si l'une de ces propositions est vraies alors l'indice de l'endomorphisme u vaut 1.