Feuille de TD n° 12

Trigonalisation, décomposition de Dunford, applications

8 décembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, trigonalisables. Si oui, donner leur forme diagonale/triangulaire/de Dunford / de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

---

1. On a $Tr(A) = 0$. On remarque un vecteur propre facile : pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a $Au = u$.
   On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$. Avec le vecteur propre u, on commence par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_3$ afin de factoriser $(X+1)$ dans le calcul du déterminant. On obtient $\chi_A(X) = (X-1)(X^2 + X - 12)$.
   Après factorisation, cela donne $\chi_A(X) = (X-1)(X+4)(X-3)$.
   Donc A est diagonalisable, et il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \text{Diag}\,(1, 3, -4)$.
2. On a $\chi_B(X) = (X-1)^3$. La matrice B trigonalisable. Elle est diagonalisable si et seulement si $\dim(Ker(B - I_3)) = 3$. On a $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2, donc $\dim(Ker(B - I_3)) = 1$.
   Cette matrice n'est donc pas diagonalisable.
   On a de même $(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\dim(Ker((B - I_3)^2)) = 2$.
   On en déduit que $\mu_B(X) = (X-1)^3$.
   Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre -1 est donc $Ker((B - I_3)^3)$, de dimension 3. Trigonalisation : La matrice B est triangulaire supérieure.
   Décomposition de Dunford : Pour $D = I_3$, on a I_3 diagonalisable (car diagonale). Comme $(B - I_3)^3 = 0$, la matrice $N = B - I_3$ est nilpotente. De plus, on a N qui commute avec $D = I_3$.
   Donc, la décomposition de Dunford de B est $B = I_3 + (B - I_3)$.
3. On a $\chi_C(X) = (X-1)(X-2)^2$. Cette matrice est trigonalisable.
   La matrice C est diagonalisable si et seulement si $\mu_C(X) = (X-1)(X-2)$, ou si et seulement si $\dim(Ker(C - 2I_3)) = 2$.
   On a $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1, donc $\dim(Ker(C - 2I_3)) = 2$.
   Cette matrice est diagonalisable.
   Il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}CP = \text{Diag}\,(1, 2, 2)$.
4. La matrice D est de rang 1. Donc, $\dim(Ker(D)) = n - 1$. Ainsi, on a $X^{n-1} \mid \chi_D(X)$.
   Cela donne $\chi_D(X) = X^n - Tr(D)X^{n-1} = X^n - nX^{n-1} = X^{n-1}(X - n)$.
   Le spectre de D est donc $\{0, n\}$. On a de plus $\dim(E_n(D)) = 1$.
   On a obtenu que $\dim(E_0(D)) = n - 1$.
   Ainsi, la matrice D est diagonalisable.
   Il existe donc une matrice inversible P telle que
   $$P^{-1}DP = \text{Diag}\,(n, 0, \dots, 0)\,.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, avec $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ sur sa diagonale.

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$, montrer que la décomposition de Dunford de A est $A = \gamma_1 I_n + (A - \gamma_1 I_n)$.
3. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux. On suppose que A est diagonalisable.
   Quelle est la décomposition de Dunford de A ?
   Donner un exemple.
4. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux.
   Donner un exemple de matrice A, non diagonalisable, où la décomposition de Dunford de A n'est pas $A = Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + (A - Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

---

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \Pi_{i=1}^n (X - \gamma_i)$. Il est scindé, donc A est trigonalisable.

2. Dans ce cas, on a $\chi_A(X) = (X-\gamma_1)^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $(A-\gamma_1 I_n)^n = 0$.
Donc, pour $D = \gamma_1 I_n$, $N = A-\gamma_1 I_n$, on a D diagonalisable, N nilpotente, $A = D+N$, et D et N commutent.
On a obtenu la décomposition de Dunford de A.
3. Comme A est diagonalisable, on a $A = A+0$. On a obtenu sa décomposition de Dunford.
Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
4. Il faut deux valeurs propres différentes, et l'une au moins avec une multiplicité d'au moins 2. On prend alors $n \geq 3$. On prend par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice A est triangulaire supérieure. Elle est trigonalisable, mais elle n'est pas annulée par $(X-2)(X-1)$, donc elle n'est pas trigonalisable. ($A - I_3$ est de rang 2, donc noyau de dimension 1)
Pour $D = Diag(1,2,1)$, la matrice D est bien diagonale et la matrice $N = A - D$ est bien nilpotente (car matrice triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale), et on a $A = D+N$. Mais, les matrices N et D ne commutent pas. Le calcul montre que $ND \neq DN$.
Donc, ces matrices ne sont pas la décomposition de Dunford de A.

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est trigonalisable.

1. Montrer que ${}^tA$ est trigonalisable.
2. On suppose A inversible. Montrer que A^{-1} est trigonalisable.
3. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $Q(A)$ est trigonalisable.
Calculer $\chi_{Q(A)}(X)$ en fonction des valeurs propres λ_i de A.
Déterminer $Spec(Q(A))$.

---

1. On a $\chi_{{}^tA}(X) = \chi_A(X)$. A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé. Donc, ${}^tA$ est trigonalisable.
2. On a une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
Comme A est inversible, on a alors $P^{-1}A^{-1}P(P^{-1}AP) = I_n$. Donc T est inversible, d'inverse $P^{-1}A^{-1}P$.
Or, l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. On a donc $P^{-1}A^{-1}P$ triangulaire supérieure, d'où A^{-1} trigonalisable.
3. On a déjà montré que pour $T = P^{-1}AP$, et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $P^{-1}Q(A)P = Q(T)$.
Un polynôme en une matrice triangulaire est encore une matrice triangulaire, donc $Q(A)$ est trigonalisable.
Pour $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les coefficients diagonaux de T, on a vu en cours que les coefficients diagonaux de $Q(T)$ sont $Q(\gamma_1), \ldots, Q(\gamma_n)$.
On a donc $\chi_A(X) = \chi_T(X) = \Pi_{i=1}^n (X-\gamma_i)$ et $\chi_{Q(A)}(X) = \chi_{Q(T)}(X) = \Pi_{i=1}^n (X - Q(\gamma_i))$.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A.
On a alors $\Pi_{j=1}^r (X-\lambda_j)^{m_A(\lambda_j)} = \chi_A(X) = \Pi_{i=1}^n (X-\gamma_i)$.
On en déduit donc que $\chi_{Q(A)}(X) = \Pi_{j=1}^r (X - Q(\lambda_j))^{m_A(\lambda_j)}$.
On a donc $Spec(Q(A)) = \{Q(\lambda_1), \ldots Q(\lambda_r)\} = Q(Spec(A))$.

Exercice 4. Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ les EDL :

1. $y"(x) - 2y'(x) = -y(x)$
2. $y"(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4i$
3. $y"(x) + y(x) = 2x$
4. $y^{(n)}(x) = y(x)$

On pose $D : y \mapsto y'$ l'endomorphisme de dérivation.
Les équations se ramènent à résoudre $P(D)(y) = b$, pour P un polynôme et b une certaine fonction.

1. On a $P(D)(y) = 0$, avec $P(X) = X^2 - 2X + 1$. On cherche à déterminer $Ker(P(D))$.
Comme $P(X) = (X+1)^2$ (-1 est une racine double), on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(-x), x \mapsto x\exp(-x))$ d'après le cours.
Donc, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = (ax+b)\exp(-x)$.
2. On a $P(D)(y) = b$ pour $P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et $b(x) = 4i$.
Une solution particulière de l'EDL est $y_0(x) = 4i$.
On détermine $Ker(P(D))$. D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(2x), x \mapsto exp(3x))$.
Ainsi, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = a\exp(2x) + b\exp(3x) + 4i$.
3. On a $P(D)(y) = b$, pour $b(x) = 2x$ et $P(X) = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$.
Une solution particulière de l'EDL est $y_0(x) = 2x$.
On détermine $Ker(P(D))$. D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(ix), x \mapsto exp(-ix))$.
D'après le cours d'équations différentielles (ou d'après les formules d'Euler), on a aussi $Ker(P(D)) = Vect(\cos, \sin)$. Ainsi, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = a\cos(x) + b\sin(cx) + 2x$.
4. On a $P(D)(y) = 0$, pour $P(X) = X^n - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(X - \exp(\frac{2i.k\pi}{n}))$.
D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(x \mapsto \exp(\frac{2i.k\pi}{n}x), 0 \leq k \leq n-1)$.
Ainsi, y est solution de l'EDL si et seulement s'il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \exp(\frac{2i.k\pi}{n}x)$.

Exercice 5. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle trigonalisable ?
   Si oui, donner sa forme triangulaire supérieure et sa décomposition de Dunford.
2. Calculer A^n, pour tout $n \geq 0$.

---

1. On obtient $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
   Comme on a $A \neq I_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable. Par contre, elle est trigonalisable.
   Donc, il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.
   Pour la décomposition de Dunford $A = D + N$, la patrie diagonalisable a ainsi comme valeur propre 1.
   Une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre est diagonale, donc $D = I_2$.
   On a donc $N = A - D = A - I_2$, d'où $A = I_2 + (A - I_2)$.
2. On a $N^2 = 0$, la matrice N est nilpotente d'ordre 2.
   On a $A^0 = I_n$.
   Soit $n \geq 1$. Comme N et D commutent, la formule du binôme donne :
   $A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^n N^k \binom{n}{k} D^{n-k} = I_2 D^n \binom{n}{0} + N D^{n-1}\binom{n}{1}$. $A^n = D^n + nND^{n-1} = I_n + nN = I_2 + n(A - I_2)$. $A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & 1+n \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Trouver dans $\mathbb{C}$ les suites récurrentes linéaires solutions des équations suivantes :

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
2. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$
3. $u_{n+2} + u_n = 2n$
   Résoudre aussi cette équation dans $\mathbb{R}$
4. $u_{n+m} = u_n$

On pose $D : u = (u_n)_{n\geq 0} \mapsto (u_{n+1})_n$ l'endomorphisme de décalage à gauche.
Les équations se ramènent à résoudre $P(D)(u) = b$, pour P un polynôme et b une certaine suite.

1. On a $P(D)(u) = 0$ pour $P(X) = X^2 - X - 1$. (cela donne la suite de Fibonacci, entre autres)
   Les racines de ce polynôme sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect(((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)_n, (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)_n)$. Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
   $u_n = a(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + b(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
2. On a $P(D)(u) = b$ pour $P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$, et $b_n = 1$.
   Pour $v_n = n$ on a $P(D)(v)_n = (n+2) - 3(n+1) + 2n = -1$.
   Donc, la suite $-v$ est une solution particulière de l'équation.
   D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect((1)_n, (2^n)_n)$.
   Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
   $u_n = a + b2^n - n$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
3. On a $P(D)(u) = b$ avec $P(X) = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ et $b_n = 2n$.
   Pour $v_n = n$, on a $P(D)(v)_n = (n+1) + n = 2n + 1$.
   Pour $w_n = 1$, on a $P(D)(w)_n = 1 + 1 = 2$.
   Donc, $(n - \frac{1}{2})_n$ est une solution particulière de l'équation.
   D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect((i^n)_n, ((-i)^n)_n)$.
   Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
   $u_n = ai^n + b(-i)^n + n - \frac{1}{2}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
   Une autre base de $Ker(P(D))$ est $((i^n + (-i)^n)_n, (\frac{(i^n) - (-i)^n}{i})_n)$.
   Ces deux suites sont à valeurs réelles.
   On peut remarquer que les coefficients de la suite récurrence linéaire sont tous réels.
   Ainsi, une solution réelle $(u_n)_n$ est simplement une solution complexe dont les coefficients sont réels.
   De plus, pour toute solution complexe $(u_n)_n$, la suite $(Re(u_n))_n$ est encore une solution de l'équation, et cette solution est à coefficients réels.
   Donc, les suites de $Ker(P(D))$ qui sont réelles sont exactement les combinaisons linéaires à coeffs réels de $(i^n + (-i)^n)_n$ et $(\frac{(i^n) - (-i)^n}{i})_n$.
   On en déduit donc que les suites réelles solution de l'équation sont de la forme :
   $u_n = a(i^n + (-i)^n) + b(\frac{(i^n) - (-i)^n}{i}) + n - \frac{1}{2}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
4. On a $P(D)(u) = 0$ avec $P(X) = X^m - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(X - \exp(\frac{2i.k\pi}{m}))$.
   D'après le cours, on a $Ker(P(D)) = Vect((\exp(\frac{2i.n.k\pi}{n} x))_n, 0 \leq k \leq n-1)$.
   Ainsi, les suites solutions de l'équation sont de la forme :
   $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \exp(\frac{2i.n.k\pi}{m})$, pour $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$.