Feuille de TD n° 12

Trigonalisation, décomposition de Dunford, applications

8 décembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, trigonalisables. Si oui, donner leur forme diagonale/triangulaire/de Dunford / de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, avec $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ sur sa diagonale.

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n$, montrer que la décomposition de Dunford de A est $A = \gamma_1 I_n + (A - \gamma_1 I_n)$.
3. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux. On suppose que A est diagonalisable.
   Quelle est la décomposition de Dunford de A ?
   Donner un exemple.
4. On suppose que les γ_i ne sont pas tous égaux.
   Donner un exemple de matrice A, non diagonalisable, où la décomposition de Dunford de A n'est pas $A = Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + (A - Diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est trigonalisable.

1. Montrer que ${}^tA$ est trigonalisable.
2. On suppose A inversible. Montrer que A^{-1} est trigonalisable.
3. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $Q(A)$ est trigonalisable.
   Calculer $\chi_{Q(A)}(X)$ en fonction des valeurs propres λ_i de A.
   Déterminer $Spec(Q(A))$.

Exercice 4. Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ les EDL :

1. $y"(x) - 2y'(x) = -y(x)$
2. $y"(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4i$
3. $y"(x) + y(x) = 2x$
4. $y^{(n)}(x) = y(x)$

Exercice 5. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle trigonalisable ?
   Si oui, donner sa forme triangulaire supérieure et sa décomposition de Dunford.
2. Calculer A^n, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6. Trouver dans $\mathbb{C}$ les suites récurrentes linéaires solutions des équations suivantes :

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
2. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$
3. $u_{n+2} + u_n = 2n$
   Résoudre aussi cette équation dans $\mathbb{R}$
4. $u_{n+m} = u_n$