Feuille de TD n° 13

Produit scalaire, orthogonalité

14 décembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Soient x et y deux vecteurs de E.

1. Montrer que
$$\|x\| = \|y\| \Longleftrightarrow x + y \perp x - y.$$
Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, représenter cette propriété sur un dessin.
2. Soient $e_1, \dots, e_n \in E$.
Montrer que $Vect(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$.

---

1. On a $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
Donc, on a $\langle x+y, x-y\rangle = 0$ si et seulement si $\|x\|^2 = \|y\|^2$, si et seulement si $\|x\| = \|y\|$.
Les vecteurs x et y sont de même norme si et seulement si le quatrilatère formé par 0,x,y,$x+y$ est un losange. (diagonales perpendiculaires, qui se coupent en leur milieu)
2. On a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset Vect(e_1, \dots, e_n)$, donc $Vect(e_1, \dots, e_n)^\perp \subset \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$.
Réciproquement, soit $x \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$. On a donc $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
Donc, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, on a
$$\langle x, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle = 0$$
Donc, x est orthogonal à tout vecteur de $Vect(e_1, \dots, e_n)$. On a donc bien montré que $Vect(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$.

Exercice 2. Soient $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'application φ définie par
$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2$$
est un produit scalaire.
Ecire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Construire une base de $\mathbb{R}^2$ qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

---

1. On vérifie que φ est bilinéaire, symétrique.
On a $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 + (1 - \frac{1}{4})x_2^2 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$.
Cela permet de montrer que φ est définie positive.
Cette fonction est donc un produit scalaire.
La matrice de φ dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
2. On prend en premier vecteur $e_1 = (1, 0)$. On a $\varphi(e_1, e_1) = 1$, donc e_1 est de norme 1.
On commence par chercher un second vecteur de la forme $e_2 = (a, 1)$, avec $a \in \mathbb{R}$.
On veut que $e_1 \perp e_2$.
On a $\varphi(e_1, e_2) = 1.a + \frac{1}{2}1.1 + 0 + 0 = \frac{1}{2} + a$.
Pour $a = -\frac{1}{2}$, on a donc $e_2 = (\frac{-1}{2}, 1)$ orthogonal à e_1.
Une base orthonormée est une base orthogonale (obtenu) et de norme 1.
On prend ainsi en second vecteur : $f_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\varphi(e_2, e_2)}}$.
On a $\varphi(e_2, e_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$.
On a donc $f_2 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.
La famille (e_1, f_2) est donc une base de $\mathbb{R}^2$, de norme 1, orthogonale. C'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour φ.

Exercice 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $F = Vect\,(e_1, e_2)$.

1. Trouver un produit scalaire φ tel que
$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4yz + 2xz.$$
2. Écrire la matrice de ce produit scalaire dans la base B.
3. Quelle est la dimension de $F^\perp$? Déterminer une base de $F^\perp$.

---

1. On pose $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2y_2x_3 + x_1y_3 + x_3y_1$.
   f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.
   On a $f(u,u) = x^2+2y^2+3z^2+2xy+4yz+2xz = (x+(y+z))^2-(y+z)^2+2y^2+3z^2+4yz$
   $f(u,u) = (x+y+z)^2 + y^2 + 2yz + 2z^2 = (x+y+z)^2 + (y+z)^2 + z^2$.
   Cela montre que f est définie positive.
2. La matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. F est de dimension 2, donc $F^\perp$ est de dimension $3-2=1$.
   On a $F^\perp = \{e_1, e_2\}^\perp$.
   On cherche les vecteurs u orthogonaux à e_1 et e_2.
   On a $f(u,e_1) = x+y+z$, $f(u,e_2) = 2y+x+2z$.
   On doit résoudre le système linéaire $f(u,e_1)=0$ et $f(u,e_2)=0$. Ainsi, on a $f(u,e_1)=0$ et $f(u,e_2)=0$ si et seulement si $x=-y-z$ et $2y+x+2z=0$, si et seulement si $x=-y-z$ et $y+z=0$, si et seulement si $y=-z$ et $x=-y-z=0$, si et seulement si $u=(0,-z,z)=z(0,-1,1)$.
   On a donc $F^\perp = Vect((0,-1,1))$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit F un sous-ev de E de dimension finie.
Soit $(e_1,\dots,e_r)$ une base orthonormée de F. Soit $x \in E$.
On pose $x' = x - \sum_{k=1}^r \langle x, e_k\rangle e_k$.

1. Montrer que $x' \in F^\perp$.
2. Exprimer $\|x\|^2$ en fonction de $\|x'\|$ et des $\langle x, e_k\rangle$.
3. Soit $y \in F$. Montrer que l'on a $\|x-y\| \geq \|x'\|$.
4. En déduire que $d(x,F) = \inf_{y\in F}(\|x-y\|)$ est atteint, et donner sa valeur.
5. Montrer que le vecteur $z \in F$ tel que $\|x-z\| = \inf_{y\in F}(\|x-y\|)$ est unique.

---

1. On a $F^\perp = \{e_1,\dots,e_r\}^\perp$. On doit donc montrer que x' est orthogonal à tous les e_i.
   On a
   $$\langle x', e_i\rangle = \langle x - \sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_i\rangle = \langle x,e_i\rangle - \langle x,e_i\rangle = 0.$$
   On a donc bien montré que x' est orthogonal à tous les e_i, donc qu'il est orthogonal à F.
2. On a $x = x' + \sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k$.
   Or, x' est orthogonal à $\sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k$ d'après 1).
   D'après le théorème de Pythagore, on a donc
   $$\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|\sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k\|^2 = \|x'\|^2 + \sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle^2.$$
3. Comme en 2), on a $x - y = x' + \sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k - y$. Le théorème de Pythagore donne
   $$\|x-y\|^2 = \|x'\|^2 + \|\sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k - y\|^2 \geq \|x'\|^2.$$
   On obtient ainsi que $\|x-y\| \geq \|x'\|$.
4. On pose $z = \sum_{k=1}^r \langle x,e_k\rangle e_k$. On a alors $z \in F$ et $x' = x - z$. De plus, pour tout $y \in F$, on a $\|x-y\| \geq \|x-z\|$.
   On en déduit donc que $\inf_{y\in F}(\|x-y\|) = \|x-z\| = \|x'\|$. Cet infimum est donc atteint en z, et vaut $\|x'\|$.
5. Soit z' tel que $\|x-z'\| = \|x-z\| = \|x'\|$.
   D'après l'équation en 3), on a
   $$\|x-z\|^2 = \|x'\|^2 + \|z-z'\|^2,$$
   donc on a $\|x-z\| = \|x-z'\|$ si et seulement si $\|z-z'\| = 0$, si et seulement si $z = z'$.
   Cet infimum est donc atteint en un unique vecteur z de F.
   Ce vecteur est appelé projeté orthogonal de x sur F.

Exercice 5. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$. Soit F le plan d'équation
$$x - y + z = 0$$

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer $F^\perp$.

---

1. On a $F = Vect((1,1,0),(0,1,1)) = Vect(e_1,e_2)$. C'est un sous-ev de dimension 2.
   Le vecteur e_1 est de norme $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
   On cherche un vecteur $f \in F$ orthogonal à e_1.
   On cherche f de la forme $f = ae_1 + e_2$, $a \in \mathbb{R}$. On a $f = (a, a+1, 1)$.
   On a $\langle e_1, f\rangle = a + (a+1) = 2a+1$.
   On a donc $f \perp e_1$ si et seulement si $a = \frac{-1}{2}$.
   Pour $f = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, on a $\|f\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
   Une base orthonormée de F est donc $(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \sqrt{\frac{2}{3}}f)$.

2. On a $F^\perp = \{(1,1,0),(0,1,1)\}^\perp$. Un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs est $(1,-1,1)$.
   Le sous-ev $F^\perp$ est de dimension $3-2=1$. On a donc $F^\perp = Vect((1,-1,1))$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Soient $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. On définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ par
$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ.

---

1. La fonction φ est bien une forme bilinéaire symétrique.
   On a $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)^2$.
   Donc, $\varphi(P,P) \geq 0$. On a $\varphi(P,P) = 0$ si et seulement si $P(x_k)^2 = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$, si et seulement si $P(x_k) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$, si et seulement si P admet $x_0, \ldots, x_n$ comme racines ($n+1$ racines distinctes).
   Comme $\deg(P) \leq n$, P est donc le polynôme nul.
   On a donc bien $\varphi(P,P) = 0$ si et seulement si $P = 0$.
   La forme bilin symétrique φ est donc définie positive. C'est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_0, \ldots, x_n$.
   On rappelle que $L_i(X) = \Pi_{j \neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$.
   On a $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(x_i) = 1$.
   Ainsi, pour $i \neq j$, on a $\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) = L_i(x_i)L_j(x_i) + L_i(x_j)L_j(x_j) = 0$.
   Et on a $\varphi(L_i, L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)^2 = L_i(x_i)^2 = 1$.
   La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc orthonormée. C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc c'est une base orthonormée de cet espace pour le produit scalaire φ.