Feuille de TD n° 13

Produit scalaire, orthogonalité

14 décembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Soient x et y deux vecteurs de E.

1. Montrer que
$$\|x\| = \|y\| \Longleftrightarrow x + y \perp x - y.$$
Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, représenter cette propriété sur un dessin.
2. Soient $e_1, \ldots, e_n \in E$.
Montrer que $Vect(e_1, \ldots, e_n)^\perp = \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$.

Exercice 2. Soient $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'application φ définie par
$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + x_2 y_2$$
est un produit scalaire.
Ecire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Construire une base de $\mathbb{R}^2$ qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $F = Vect\,(e_1, e_2)$.

1. Trouver un produit scalaire φ tel que
$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4yz + 2xz.$$
2. Écrire la matrice de ce produit scalaire dans la base B.
3. Quelle est la dimension de $F^\perp$? Déterminer une base de $F^\perp$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit F un sous-ev de E de dimension finie.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de F. Soit $x \in E$.
On pose $x' = x - \sum_{k=1}^r \langle x, e_k \rangle e_k$.

1. Montrer que $x' \in F^\perp$.
2. Exprimer $\|x\|^2$ en fonction de $\|x'\|$ et des $\langle x, e_k \rangle$.
3. Soit $y \in F$. Montrer que l'on a $\|x - y\| \geq \|x'\|$.
4. En déduire que $d(x, F) = \inf_{y \in F}(\|x - y\|)$ est atteint, et donner sa valeur.
5. Montrer que le vecteur $z \in F$ tel que $\|x - z\| = \inf_{y \in F}(\|x - y\|)$ est unique.

Exercice 5. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$.
Soit F le plan d'équation
$$x - y + z = 0$$

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. On définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ par
$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ.