Feuille de TD n° 14

Réduction, orthogonalité

14 décembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Soit le produit scalaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ défini, pour tous polynômes P et Q, par

$$\varphi(P,Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

1. Écrire la matrice du produit scalaire φ dans la base canonique de $R_2[X]$.
2. Avec l'algorithme de Gram-Schmidt, obtenir une base orthonormée à partir de la base canonique.

---

1. On a $\varphi(1,1) = 3$, $\varphi(1,X) = 0$, $\varphi(1,X^2) = 2$, $\varphi(X,X) = 2$, $\varphi(X,X^2) = 0$, $\varphi(X^2,X^2) = 2$.
   La matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ est donc $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Le polynôme 1 est de norme $\sqrt{3}$. Le polynôme X est orthogonal à 1 et de norme $\sqrt{2}$.
   On a donc les deux premiers termes pour notre base (il faudra les renormaliser, les diviser par leur norme).
   Le polynôme X^2 est orthogonal à X mais n'est pas orthogonal à 1.
   Comme troisième polynôme, on prend $X^2 - 0.X - \varphi(1,X^2).1 = X^2 - 2$.
   De cette façon, on a $\varphi(X^2-2, X) = 0 = \varphi(X^2-2, 1)$.
   On a $\varphi(X^2-2, X^2-2) = 1+4+1 = 6$. Ce polynôme est donc de norme $\sqrt{6}$.
   La famille $(1, X, X^2-2)$ est donc une base orthogonale de Gram-Schmidt, issue de la base canonique.
   La famille $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{6}}(X^2-2))$ est une base orthonormée de Gram-Schmidt, issue de la base canonique.

Exercice 2. On prend $E = C^0([0, 2\Pi], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

1. On pose $F = Vect(cos, sin)$. Calculer $\|\cos\|$, $\|\sin\|$.
2. Trouver une base orthonormée (f_1, f_2) de F.
3. Montrer que les fonctions exp et $g : x \mapsto x$ ne sont pas dans F.
4. Calculer $p_F(\exp)$ et $p_F(g)$, les projetés orthogonaux de exp et de g sur F.
5. Exprimer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi}(t - (a\cos(t) + b\sin(t)))^2 dt$ en fonction de $d(g, F)$. Puis, exprimer cette quantité en fonction de $\|g\|$, $\langle g, \cos\ rangle$ et $\langle g, \sin\rangle$. Enfin, la calculer.
6. Exprimer $d(\exp, F)^2$ en fonction de $p_F(\exp)$, puis la calculer.

---

1. On calcule $\|\cos\|^2$ et $\|\sin\|^2$.
   On a
   $$\|\cos\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2t)+1}{2}dt = 0 + \frac{1}{2\pi}.\frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$
   Et,
   $$\|\sin\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2\pi}.\frac{2\pi}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$
   Donc $\|\cos\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \|\sin\|$.
2. On a $\cos(t)\sin(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$, donc on montre facilement que $\langle \cos, \sin\rangle = 0$.
   La famille $(\cos, \sin)$ est donc une base orthogonale de F, et la famille $(\sqrt{2}\cos, \sqrt{2}\sin)$ est donc une base orthonormée (orthogonale + normée) de F.
3. On a $\exp' = \exp$. Pour $f = a\cos + b\sin$, on a $f' = -a\sin + b\cos$.
   Si $f' = f$, on doit alors avoir (car $(\cos, \sin)$ est une famille libre) $a = b$ et $b = -a$, c'est-à-dire $a = b = 0$.
   Comme $\exp \neq 0$, on en déduit que $\exp \notin F$.
   Pour $g(x) = x$, on a $g(0) = 0$. Pour $f = a\cos + b\sin$, si $f(0) = 0$ on a $a = 0$ donc $f = b.\sin$.
   Mais alors $f(\pi) = 0 \neq \pi$. Donc, $x \mapsto x \notin F$.
4. Une base orthonormée de F est $(\sqrt{2}\cos, \sqrt{2}\sin)$. Le projeté orthogonal de exp sur F est alors : $p_F(\exp) = \langle \exp, \sqrt{2}\cos\rangle\sqrt{2}\cos + \langle\exp, \sqrt{2}\sin\rangle\sqrt{2}\sin = 2\langle\exp, \cos\rangle\cos + 2\langle\exp, \sin\rangle\sin$.
   De même, pour $g(x) = x$, on a $p_F(g) = 2\langle g, \cos\rangle\cos + 2\langle g, \sin\rangle\sin$.
   On a $(\exp\cos)' = \exp.(\cos - \sin)$ et $(\exp\sin)' = \exp.(\cos + \sin)$.
   Ainsi, une primitive de $\exp\cos$ est $\frac{1}{2}\exp.(\cos + \sin)$, une primitive de $\exp\sin$ est

$\frac{1}{2}\exp.(\sin - \cos)$.
Donc,

$\langle \exp, \cos\rangle = \dfrac{1}{4\Pi}[\exp(2\pi)\cos(2\Pi)+\exp(2\pi)\sin(2\pi)-\cos(0)-\sin(0)] = \dfrac{1}{4\Pi}(\exp(2\pi)-1)$,

$\langle \exp, \sin\rangle = \dfrac{1}{4\Pi}[-\exp(2\pi)\cos(2\Pi)+\exp(2\pi)\sin(2\pi)+\cos(0)-\sin(0)] = \dfrac{1}{4\Pi}(-\exp(2\pi)+1)$.

Ainsi

$$p_F(\exp) = \frac{\exp(2\Pi)-1}{2\Pi}(\cos - \sin).$$

On a $(g\cos)' = \cos - g\sin$, $(g\sin)' = \sin + g\cos$.
Ainsi, une primitive de $g\cos$ est $g\sin + \cos$, et une primitive de $g\sin$ est $-g\cos + \sin$.
Donc,

$$\langle g, \cos\rangle = \frac{1}{2\Pi}[(2\pi)\sin(2\pi) + \cos(2\pi) - (0+\cos(0))] = 0,$$
$$\langle g, \sin\rangle = \frac{1}{2\Pi}[(-2\pi)\cos(2\pi) + \sin(2\pi) - (0+\sin(0))] = -1,$$

Ainsi,

$$p_F(g) = -2\sin.$$

5. On a

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t-(a\cos(t)+b\sin(t)))^2 dt = (2\pi)\inf_{f\in F}\|g-f\|^2 = (2\pi)d(g,F)^2 = (2\pi)(\|g-p_F(g)\|^2).$$

D'après le théorème de Pythagore, comme $g - p_F(g)$ est orthogonal à F, on a :

$$\|g^2\| = \|g-p_F(g)\|^2 + \|p_F(g)\|^2$$

Donc,

$$d(g,F)^2 = \|g^2\| - \|p_F(g)\|^2 = \|g\|^2 - \langle g,\cos\rangle^2\|2\cos\|^2 - \langle g,\sin\rangle^2\|2\sin\|^2$$

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t-(a\cos(t)+b\sin(t)))^2 dt = (2\pi)\left(\|g\|^2 - \langle g,\cos\rangle^2.2 - \langle g,\sin\rangle^2.2\right)$$

On a $\|g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{(2\pi)^3}{6\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$ Donc,

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t-(a\cos(t)+b\sin(t)))^2 dt = \frac{(2\pi)^3}{3} - 0 - 4\pi.$$

6. On a $d(\exp,F)^2 = \|\exp - p_F(\exp)\|^2$.
D'après le théorème de Pythagore, comme $\exp - p_F(\exp)$ est orthogonal à F, on a :

$$\|\exp^2\| = \|\exp - p_F(\exp)\|^2 + \|p_F(\exp)\|^2$$

Donc,

$$d(\exp,F)^2 = \|\exp^2\| - \|p_F(\exp)\|^2 = \|\exp\|^2 - \langle \exp,\cos\rangle^2\|2\cos\|^2 - \langle\exp,\sin\rangle^2\|2\sin\|^2$$

$$d(\exp,F)^2 = \|\exp^2\| - \|p_F(\exp)\|^2 = \|\exp\|^2 - \left(\frac{\exp(2\pi)-1}{4\Pi}\right)^2\frac{2^2}{2} - \left(\frac{\exp(2\pi)-1}{4\Pi}\right)^2\frac{2^2}{2}$$

On a $\|\exp\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(t)^2 dt = \frac{\exp(4\pi)-1}{4\pi}$ Donc,

$$d(\exp,F)^2 = \frac{\exp(4\pi)-1}{4\pi} - 4\left(\frac{\exp(2\pi)-1}{4\Pi}\right)^2.$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des nombres réels Ω tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

---

1. $\chi_A = X(X-1)(X-a)$.
   - Si $a \neq 0, 1$ alors A est diagonalisable.
   - Si $a = 0$ alors $\mathrm{rg}A = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = 1 < m_0(A)$ et la matrice A n'est pas diagonalisable.
   - Si $a = 1$ alors $\mathrm{rg}(A-I) = 2$ et par le même argument qu'au-dessus, A n'est pas diagonalisable.

   On conclut : $\Omega = \{0, 1\}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.
   Calculer $\det(A+M)$. (On pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
4. Le résultat est-il encore vrai si M ne commute pas avec A ?

---

1. On a $\mu_A \mid X^p$, donc A est une matrice nilpotente. Le cours nous dit que $\chi_A = X^n$, et le théorème de Cayley Hamilton nous donne $A^n = \chi_A(A) = 0$.
2. On a simplement $\det(A+I) = \chi_A(1) = 1$
3. Si M est inversible on a $\det(A+M) = \det\left(AM^{-1}+I\right)\det M$.
   Or A et M^{-1} commutent donc $\left(AM^{-1}\right)^p = 0$. La question 2) donne alors : $\det(A+M) = \det M$.
   Si M n'est pas inversible, introduisons les matrices $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$.
   Comme M ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe un entier p_0 tel que les matrices M_p sont inversibles pour tout $p \geq p_0$. Les matrices M_p commutent encore avec A. On a donc :

   $$\det(A + M_p) = \det M_p$$

   Or $\det M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det M$ et $\det(A+M_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(A+M)$ (car det est une fonction polynômiale en les coefficients des matrices, donc continue).
   En passant à la limite, on obtient donc :

   $$\det(A+M) = \det M.$$

4. Si A et M ne commutent pas, c'est faux. Voici un contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ non-nuls et distincts.
On pose $M = Diag(J_1(0), J_2(0), J_3(\lambda_1), J_2(\lambda_2), J_2(\lambda_2))$, une matrice diagonale par blocs.
On rappelle que les $J_r(\lambda) = \lambda I_r + N_r$ sont des blocs de Jordan. On pose $(e_1, \ldots, e_{10})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{10}$.
• Déterminer χ_M.
• Déterminer μ_M.
• Pour chaque $\lambda \in Spec(M)$, déterminer $Ker(M - \lambda I_{10})$.
• On prend maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \lambda)^2$ et celui de la div. eucl. par $(X - \lambda)^3$. (On pourra utiliser la formule de Taylor)
• Calculer $P(M)$ en fonction des matrices nilpotentes N_2, N_3 (matrices de taille 2 et de taille 3).

---

1. On a $\chi_M(X) = X.X^2.(X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)^2(X-\lambda_2)^2 = X^3(X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)^4$.
2. D'après les résultats de cours sur les blocs de Jordan, on a $\mu_M = X^2(X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)^2$.
3. D'après les résultats sur les blocs de Jordan, on a $Spec(M) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$.
   Chaque bloc de Jordan a un sous-espace propre de dimension 1.
   Pour $J_r(\lambda)$, on a $Ker(J_r(\lambda) - I_r) = Vect(e_1)$.
   On obtient ainsi que $Ker(M) = Vect(e_1, e_2)$, $Ker(M - \lambda_1 I_{10}) = Vect(e_4)$, $Ker(M - \lambda_2 I_{10}) = Vect(e_7, e_9)$.
4. On a $P(X) = Q(X)(X-\lambda)^2 + P(\lambda) + P'(\lambda)(X-\lambda)$
   et $P(X) = Q_2(X)(X-\lambda)^3 + P(\lambda) + P'(\lambda)(X-\lambda) + \frac{P''(\lambda)}{2}(X-\lambda)^2$.
5. On a $P(M) = Diag(P(J_1(0)), P(J_2(0)), P(J_3(\lambda_1)), P(J_2(\lambda_2)), P(J_2(\lambda_2)))$.
   Comme on connaît le polynôme minimal de $J_r(\lambda)$, on en déduit que
   $P(J_1(0)) = P(0)$, $P(J_2(0)) = P(N_2) = P(0) + P'(0)N_2$,
   $P(J_2(\lambda_2)) = P(\lambda_2)I_2 + P'(\lambda_2)(J_2(\lambda_2) - \lambda_2 I_2) = P(\lambda_2) + P'(\lambda_2)N_2$
   $P(J_3(\lambda_1)) = P(\lambda_1)I_3 + P'(\lambda_1)(J_3(\lambda_1) - \lambda_1 I_3) + \frac{P''(\lambda_1)}{2}(J_3(\lambda_1) - I_3)^3 = P(\lambda_1) + P'(\lambda_1)N_3 + \frac{P''(\lambda_1)}{2}N_3^2$.
   Donc, on a
   $P(M) = Diag(P(0), P(0) + P'(0)N_2, P(\lambda_1) + P'(\lambda_1)N_3 + \frac{P''(\lambda_1)}{2}N_3^2, P(\lambda_2) + P'(\lambda_2)N_2, P(\lambda_2) + P'(\lambda_2)N_2)$.

Exercice 6. On se place sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\langle P \mid Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\langle X^p \mid X^q\rangle$ pour tous $p, q \geq 0$.
3. Soient F le sous-ev des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes P admettant 0 pour racine.
   Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Obtenir à partir de la famille $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

---

1. Cette fonction est une forme bilinéaire symétrique.
   On a $\langle P, P\rangle = P(0)^2 + \int_0^1 P'(t)^2 dt \geq 0$.
   On a $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si $P(0) = 0$ et $P'(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme P' est un polynôme, cela est équivalent à $P(0) = 0$ et $P'(X) = 0$. Cela est équivalent à $P(X) = 0$.
   Cette fonction est donc bien un produit scalaire.

2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$.
   Si $p = q = 0$ On a $\langle 1, 1\rangle = 1 + 0 = 1$.
   Si $p = 0$ et $q \geq 1$, on a $\langle 1, X^q = 0 + \int_0^1 0.qt^{q-1}dt = 0$.
   Si $q = 0$ et $p \geq 1$, on a $\langle X^p, 1\rangle = \langle 1, X^p\rangle = 0$.
   Si $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on a $\langle X^p, X^q\rangle = 0 + \int_0^1 pqx^{p+q-2}dt = \frac{pq}{p+q-1}$.

3. On a $F = Vect(1)$ et $G = Vect(X^k,\ k \geq 1)$.
   Avec le produit scalaire $\langle ., .\rangle$, on a montré que 1 est orthogonal à X^k, $\forall k \geq 1$.
   Donc, 1 est orthogonal à $Vect(X^k, k \geq 1) = G$.
   Donc, $Vect(1) = F$ est orthogonal à G.

4. On a 1 de norme 1.
   On a X orthogonal à 1, et de norme 1.
   On a X^2 orthogonal à 1 mais pas à X. On considère alors le polynôme $P_2(X) = X^2 - \langle X^2, X\rangle X = X^2 - X$. Le polynôme P_2 est alors orthogonal à 1 et à X.
   On a $\langle P_2, P_2\rangle = \langle X^2, X^2\rangle - 2\langle X, X^2\rangle + \langle X, X\rangle = \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$.
   On a X^3 orthogonal à 1, mais pas à X ni à X^2. On considère alors le polynôme $P_3(X) = X^3 - \langle X^3, X^2\rangle X^2 - \langle X^3, X\rangle X = X^3 - \frac{3}{2}X^2 - X$. Le polynôme P_3 est alors orthogonal à 1,X,X^2, donc à $1, X, P_2$.
   On a $\langle P_3, P_3\rangle = \int_0^1 (3t^2 - 3t - 1)^2 dt = \int_0^1 (9t^4 - 18t^3 + 3t^2 + 6t + 1)dt = \frac{9}{5} - \frac{9}{2} + 1 + 3 + 1$
   $\langle P_3, P_3\rangle = \frac{18}{10} - \frac{45}{10} + \frac{50}{10} = \frac{23}{10} = 2.3$.
   Ainsi, la famille $(1, X, P_2, P_3)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est aussi une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   La famille $(1, X, \sqrt{3}P_2, \frac{1}{\sqrt{2.3}}P_3)$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7. • Montrer que les matrices suivantes sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Calculer leur polynôme minimal, et déterminer leur forme de Jordan.
• Déterminer la décomposition de Dunford de B, $B = D + N$. Combien vaut l'indice de nilpotence de N ?
• Calculer B^m, pour tout $m \geq 0$.

— Un calcul de déterminant donne $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$.
La matrice A est donc trigonalisable.
On a donc $\mu_A(X) = (X+1)(X-1)$ ou $\mu_A = \chi_A$.
Le calcul donne $E_1 = \mathrm{Vect}({}^t(\ 1 \quad 0 \quad 1\ ))$, de dimension 1. Comme le sous-espace propre associé à 1 n'est pas de dimension 2, la matrice A n'est pas diagonalisable.
Son polynôme minimal est donc $\mu_A(X) = (X+1)(X-1)^2$ (**Note :** On pouvait aussi calculer $(A + I_3)(A - I_3)$). La forme de Jordan de A est donc la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe $P \in \mathscr{M}_3(¶)$ inversible, telle que $P^{-1}AP = T$.

— Un calcul de déterminant donne $\chi_B(X) = (X-1)^3$, donc B est trigonalisable.
On a donc $\mu_B(X) = (X-1)^k$ avec $k \in \{1, 2, 3\}$. On a $B \neq I_3$, donc $\mu_B(X) \neq X - 1$, donc B n'est pas diagonalisable.
Le calcul montre que $(B - I_3)^2 = 0$. On a donc $\mu_B(X) = (X-1)^2$.
Avec la valeur de μ_B, on en déduit que la forme de Jordan de B est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe $P \in \mathscr{M}_3(¶)$ inversible, telle que $P^{-1}BP = T$.

— Comme B est trigonalisable, avec $Spec(B) = \{1\}$, la décomposition de Dunford de B s'écrit : $B = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotent, et $DN = ND$.
D'après le cours on a $\chi_D = \chi_B$, donc $Spec(D) = \{1\}$. On a donc $D = I_3$.
Cela implique que $N = B - D = B - I_3$, et $B = I_3 + (B - I_3)$.

— Comme $\mu_B(X) = (X-1)^2$, on en déduit que $N = (B - I_3)$ est une matrice nilpotente d'indice 2.
On utilise alors la formule du binôme pour calculer B^m, quand $m \geq 1$:

$$B^m = (I_3 + (B - I_3))^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (B - I_3)^k I_3^{m-k}$$

$$B^m = \sum_{k=0}^{1} \binom{m}{k} (B - I_3)^k.1 = 1.I3 + m(B - I_3) = mB + (1-m)I_3.$$

Autre méthode : On peut effectuer la division euclidienne de P par $(X-1)^2$, pour obtenir $P(X) = (X-1)^2.Q(X) + P'(1)(X-1) + P(1)$ (découle de la formule de Taylor). En prenant $P(X) = X^m$ on obtient alors le résultat.

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application linéaire $F : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $F(u) = f \circ u$.

1. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, F est diagonalisable. (On pourra regarder $P(F)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$)
2. Montrer que f et F ont le même polynôme minimal.
En déduire que f et F ont les mêmes valeurs propres.
3. On suppose f diagonalisable. Soit λ une valeur propre de f.
Etablir que $\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f)$,
puis que $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$.

---

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On a $P(F)(u) = P(f) \circ u$, donc $P(f) = 0 \iff P(F) = 0$.
Donc, f est diagonalisable ssi f est annulé par un polynôme scindé à racines simples, ssi F est annulé par un polynôme scindé à racines simples, ssi F est diagonalisable.
2. Comme $P(f) = 0$ ssi $P(F) = 0$, on en déduit d'après le cours que f et F ont le même polynôme minimal.
Comme les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal, f et F ont donc les mêmes valeurs propres.
3. Pour $u :\in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(E) \subset E_\lambda(f)$, on a $F(u) = \lambda u$, donc $u \in E_\lambda(F)$. donc
$$\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f).$$
Mais par diagonalisabilité, on a
$$\dim \mathcal{L}(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(F)} \dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E).$$
On a donc l'égalité entre les dimensions :
$$\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f),$$
pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1 + 1 \neq 0$. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si f vérifie $f^3 + 2f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$, alors f est bijectif.

En dimension finie Le polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ est annulateur de f et 0 n'est pas racine de P car $P(0) = 2 \neq 0$, donc $0 \notin \operatorname{Spec}(f)$. Comme E est de dimension finie, on en déduit que f est inversible, donc bijectif.

En dimension infinie (ou finie) Pour E quelconque, on utilise la relation

$$f \circ \left[\frac{1}{2}\left(f^2 + 2f - \mathrm{Id}_E\right)\right] = \left[\frac{1}{2}\left(f^2 + 2f - \mathrm{Id}_E\right)\right] \circ f = \mathrm{Id}_E$$

pour conclure que f est inversible, donc bijectif.