# Feuille de TD n° 14

*Réduction, orthogonalité*

14 décembre 2021

**Exercice 1.** Soit le produit scalaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ défini, pour tous polynômes $P$ et $Q$, par

$$\varphi(P,Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

1. Écrire la matrice du produit scalaire $\varphi$ dans la base canonique de $R_2[X]$.
2. Avec l'algorithme de Gram-Schmidt, obtenir une base orthonormée à partir de la base canonique.

**Exercice 2.** On prend $E = C^0([0,2\Pi],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

1. On pose $F = Vect(cos, sin)$. Calculer $\|\cos\|$, $\|\sin\|$.
2. Trouver une base orthonormée $(f_1, f_2)$ de $F$.
3. Montrer que les fonctions exp et $g : x \mapsto x$ ne sont pas dans $F$.
4. Calculer $p_F(\exp)$ et $p_F(g)$, les projetés orthogonaux de exp et de $g$ sur $F$.
5. Exprimer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi}(t-(a\cos(t)+b\sin(t)))^2dt$ en fonction de $d(g,F)$. Puis, exprimer cette quantité en fonction de $\|g\|$, $\langle g, \cos\ rangle$ et $\langle g, \sin\rangle$. Enfin, la calculer.
6. Exprimer $d(\exp,F)^2$ en fonction de $p_F(\exp)$, puis la calculer.

**Exercice 3.** Déterminer l'ensemble des nombres réels $\Omega$ tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 4.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(A + I_n)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.
   Calculer $\det(A+M)$. (On pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
4. Le résultat est-il encore vrai si $M$ ne commute pas avec $A$ ?

**Exercice 5.** Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ non-nuls et distincts.
On pose $M = Diag(J_1(0), J_2(0), J_3(\lambda_1), J_2(\lambda_2), J_2(\lambda_2))$, une matrice diagonale par blocs.
On rappelle que les $J_r(\lambda) = \lambda I_r + N_r$ sont des blocs de Jordan. On pose $(e_1, \ldots, e_{10})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{10}$.
• Déterminer $\chi_M$.
• Déterminer $\mu_M$.
• Pour chaque $\lambda \in Spec(M)$, déterminer $Ker(M - \lambda I_{10})$.
• On prend maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-\lambda)^2$ et celui de la div. eucl. par $(X-\lambda)^3$. (On pourra utiliser la formule de Taylor)
• Calculer $P(M)$ en fonction des matrices nilpotentes $N_2, N_3$ (matrices de taille 2 et de taille 3 ).

**Exercice 6.** On se place sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\langle P \mid Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\langle X^p \mid X^q\rangle$ pour tous $p, q \geq 0$.
3. Soient $F$ le sous-ev des polynômes constants et $G$ l'ensemble des polynômes $P$ admettant 0 pour racine.
   Montrer que les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ sont orthogonaux.
4. Obtenir à partir de la famille $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

**Exercice 7.** • Montrer que les matrices suivantes sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Calculer leur polynôme minimal, et déterminer leur forme de Jordan.
• Déterminer la décomposition de Dunford de $B$, $B = D + N$. Combien vaut

l'indice de nilpotence de $N$ ?
• Calculer $B^m$, pour tout $m \geq 0$.

**Exercice 8.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application linéaire $F : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $F(u) = f \circ u$.

1. Montrer que $f$ est diagonalisable si, et seulement si, $F$ est diagonalisable. (On pourra regarder $P(F)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$)
2. Montrer que $f$ et $F$ ont le même polynôme minimal. En déduire que $f$ et $F$ ont les mêmes valeurs propres.
3. On suppose $f$ diagonalisable. Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$. Etablir que $\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f)$, puis que $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$.

**Exercice 9.** Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1 + 1 \neq 0$. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $f$ vérifie $f^3 + 2f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$, alors $f$ est bijectif.