Feuille de TD n° 2

Déterminant

23 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les mineurs $\Delta_{2,2}$ et $\Delta_{1,3}$.
Calculer $\det(A)$ en effectuant un développement selon la première ligne.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$.
• On définit l'endomorphisme $f : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X.P'(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\det(f)$.
• On définit l'endomorphisme $g : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\det(g)$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $A_n = (i+j)_{(i,j)}$.
• Calculer $\det(A_2), \det(A_3)$.
• Montrer que A_n n'est pas inversible pour tout $n \geq 3$.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Soit $A_n = (\max(i,j))_{(i,j)}$.
• Calculer $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.
• Calculer $\det(A_n)$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$.
On définit la matrice $A_\tau \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $a_{i,j} = \delta_{i,\tau(j)}$.
Montrer que $\det(A_\tau) = \varepsilon(\tau)$.

Exercice 8. Soit E un e.v. de dimension n, $n \geq 1$. Soit $s : E \to E$ une symétrie.
• Exprimer $\det(s)$ en fonction de $\dim(Ker(s - Id))$ ou $\dim(Ker(s + Id))$.
• Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit l'endomorphisme f par $f(a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n) = a_n + a_{n-1} X + \ldots + a_0 X^n$.
Calculer $\det(f)$.
• Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme g par $g(A) = {}^t(A)$.
Calculer $\det(g)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ à coefficients entiers.
• Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
• On suppose que A est inversible et que A^{-1} est à coefficients entiers.
Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 10. Soit $n \geq 2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Calculer $\det(A_3)$ et $\det(A_4)$.
• En déduire $\det(A_n)$.

Un peu de produit scalaire . . .

Exercice 11. Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}(A\cdot\ {}^tB),$$

où Tr est la trace et ${}^tB$ est la transposée de B.

1. Montrer que $\varphi(A,A)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Exprimer $\|A\|$.
4. Montrer que $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\leq n\times\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.
5. Montrer que $\|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\times\|B\|$.

---

1. $(A\cdot B)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, d'où $(A\cdot\ {}^tB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{jk}$,

   d'où $(A\cdot\ {}^tB)_{ii}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ik}$, d'où $\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}(A\cdot\ {}^tB)=\sum_{i=1}^n(A\cdot\ {}^tB)_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ik}$. Donc $\varphi(A,A)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2$.
2. La forme φ est symétrique car $\mathrm{Tr}(\ {}^tM)=\mathrm{Tr}(M)$ et ${}^t(A\cdot\ {}^tB)=B\cdot\ {}^tA$. D'où
   $$\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}(A\cdot\ {}^tB)=\mathrm{Tr}(B\cdot\ {}^tA)=\varphi(B,A).$$
   Et bilinéaire car $(\alpha A+\beta B)\cdot\ {}^tC=\alpha A\cdot\ {}^tC+\beta B\cdot\ {}^tC$ et Tr est linéare, d'où
   $$\varphi(\alpha A+\beta B,C)=\alpha\mathrm{Tr}(A\cdot\ {}^tC)+\beta\mathrm{Tr}(B\cdot\ {}^tC)=\alpha\varphi(A,C)+\beta\varphi(B,C).$$
   Et positive car (première question) $\varphi(A,A)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\geq 0$.

   Et définie car
   $$\varphi(A,A)=0\implies\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2=0.\implies\forall i,\forall j,a_{ij}=0\implies A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$
3. $\|A\|=\sqrt{\varphi(A,A)}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2}$.
4. On choisit $A=(|a_{ij}|)$ et $B=(1)_{ij}$ et on applique à ces deux matrices l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\varphi(A,B)|\leq\|A\|\cdot\|B\|$:
   $$\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(|a_{ij}|\cdot 1)\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 1^2}.$$
   Donc $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\leq n\times\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.
5. — Soient $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ et $C=AB$. On veut obtenir cette inégalité à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On commence par calculer $\|AB\|$:

   On a $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$ et $\|AB\|^2=\sum_{i,j}c_{ij}^2=\sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2$.

   — On prend alors les vecteurs $u_i=(a_{ik})_k\in\mathbb{R}^n$ et $v_j=(b_{kj})_k\in\mathbb{R}^n$, pour $1\leq i,j\neq n$. On applique à ces deux vecteurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$: $<u_i,v_j>^2\leq\|u_i\|_2^2\cdot\|v_j\|_2^2$.
   Cela donne :
   $$\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)^2\leq\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\cdot\sum_{\ell=1}^n b_{\ell j}^2.$$
   Puis, on somme sur i et j :
   $$\sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)^2\leq\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\cdot\sum_{\ell=1}^n b_{\ell j}^2.$$
   — D'où $\sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)^2\leq\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2\cdot\sum_{j,\ell=1}^n b_{\ell j}^2$. On obtient donc : $\|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\times\|B\|$.

Indications

Exercice 2

On cherchera à utiliser des factorisations/opérations sur les lignes/opérations sur les colonnes le plus possible.

Exercice 3

Ecrire la matrice de f (et g) dans une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4

On cherchera à calculer un déterminant.
Utiliser des opérations sur les lignes/colonnes.

Exercice 5

On cherchera à se ramener à $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$.

Exercice 7

On utilisera un résultat qui contient des permutations.

Exercice 8

On pourra montrer que f et g sont des symétries.

Exercice 10

Utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes.

Exercice 1:

- On a : $\Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3$, $\Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

- On a :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7 + 10 = 3$$

Exercice 2 :

On a :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{vmatrix} = x \times x \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x^3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x^3-1 & x-1 & 1-x \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$= x^2 \times (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1+x+x^2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x+x^2 & 0 & -1-x \\ -1 & 0 & 3-2x \end{vmatrix} = x^2(x-1)(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-2x \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$= x^2(x-1)(x+1) \times (-1)^3 \times \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & 3-2x \end{vmatrix}$$
$$= x^2(x-1)(x+1) \times (2x^2-3x+1)$$

Exercice 3:

- On a $f(1) = 0$, $f(X) = X$, $f(X^2) = 2X^2$.

Pour tout $k \geq 0$, on a : $f(X^k) = kX^k$.

On a $f(1) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$. f n'est pas injectif, donc cet endomorphisme n'est pas bijectif.

Ainsi, on a $\det(f) = 0$.

- Soit $k \geq 0$. On a $g(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} X^i \binom{k}{i}$

Donc, $g(X^k)$ est de degré k et unitaire.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. $\mathcal{B} = (1; X; \dots; X^n)$

Alors, $Mat_{\mathcal{B}}(g)$ est de la forme :

$$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & * & \dots * \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire.

On a donc $\det(g) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(g)) = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$.

<u>Exercice 4 :</u>

On a $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A_2) = 8 - 9 = -1$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

deux colonnes égales

Soit $n \geq 3$. On montre que $\det(A_n) = 0$.

On a $C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+2 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ \vdots \\ n+3 \end{pmatrix}$

Alors, on a $C_3 - C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 - C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc, on a $C_3 - C_2 = C_2 - C_1 \Rightarrow C_1 = 2C_2 - C_3$

C_1 est combi. lin. des autres colonnes de A_n.

Ainsi, on a $\det(A_n) = 0$.

Donc, A_n n'est pas inversible pour $n \geq 3$.

<u>Exercice 5</u>: Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. On permute les colonnes de M pour exprimer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.

On pose $\sigma = (1, n+1) \cdot (2, n+2) \cdot (3, n+3) \cdot \ldots \cdot (n, 2n) \in S_n$.

transpositions

Soient $C_1; \ldots; C_{2n}$ les colonnes de M.

Alors, on a : $\det(M) = \det(C_1; \ldots; C_{2n}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_{\sigma(1)}; \ldots; C_{\sigma(2n)})$

$= \varepsilon(\sigma) \det(C_{n+1}; C_{n+2}; \cdots; C_{2n}; C_1; C_2; \cdots; C_n)$

$= \varepsilon(\sigma) \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det(A) \det(B) = (-1)^n \det(A) \det(B)$.

<u>Exercice 6</u>: On a :

$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

Soit $n \geq 2$.

On a : $\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} n & n & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$, pour $2 \leq i \leq n$.

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{développement} \\ \text{colonne } n}}{=} (-1)^{n+1} \times n \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \times n.$$

__Exercice 7 :__

On a $\det(A_\tau) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i)\,\tau(i)}$

Si $\sigma \neq \tau$, $\exists\, 1 \leq i \leq n$ tel que $\sigma(i) \neq \tau(i)$, donc $\delta_{\sigma(i)\,\tau(i)} = 0$.

Ainsi, $\det(A_\tau) = \varepsilon(\tau) \times \prod_{i=1}^{n} 1 + 0$

$= \varepsilon(\tau)$.

__Exercice 8 :__ • On a $s^2 = Id_E$.

On sait que $E = \mathrm{Ker}(s - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id_E)$

Pour B_1 une base de $\mathrm{Ker}(s - Id_E)$ et B_2 une base de $\mathrm{Ker}(s + Id_E)$,

$B_1 \cup B_2$ est une base de E.

On pose $B_1 = (e_1, \cdots, e_r)$, $B_2 = (e_{r+1}, \cdots, e_n)$.

Alors on a $s(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ -e_i & \text{si } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$

Donc, $\underset{B_1 \cup B_2}{\mathrm{Mat}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}$

Donc, $\det(s) = \det\left(\underset{B_1 \cup B_2}{\mathrm{Mat}}(s)\right) = 1^r \times (-1)^{n-r} = (-1)^{n-r}$

$= (-1)^{\dim(\mathrm{Ker}(s+Id_E))} = (-1)^{n-\dim(\mathrm{Ker}(s-Id_E))}$

- Soit $P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$

On a $f(f(P)) = f(a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0 X^n) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

$= P(X)$.

Donc, on a $f^2 = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$

On détermine $\mathrm{Ker}(f - Id)$. On a $P \in \mathrm{Ker}(f - Id) \Leftrightarrow f(P) = P$

$\Leftrightarrow a_0 + \cdots + a_n X^n = a_n + \cdots + a_0 X^n$

Si $n = 2k$, on a $f(P) = P \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_n = a_{2k} \\ a_1 = a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{k-1} = a_{k+1} \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Vect}(1 + X^n; X + X^{n-1}; X^2 + X^{n-2}; \ldots; X^{k-1} + X^{k+1})$

famille de la polynômes échelonnée en degré

Ce sous-ev est donc de dimension $k = \frac{n}{2}$.

On a $k = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

Si $n = 2k+1$, on a $f(P) = P \iff \begin{cases} a_0 = a_n = a_{2k+1} \\ a_1 = a_{n-1} \\ \vdots \\ a_k = a_{k+1} \end{cases}$

Donc, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1+X^n ; X+X^{n-1} ; \dots ; X^k + X^{k+1})$

famille de $k+1$ polynômes échelonnée en degré

Ainsi, ce sous-ev est de dimension $k+1$.

On a $k+1 = \frac{n+1}{2}$

On obtient donc que $\det(f) = (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$

- On a $g(g(A)) = {}^t({}^tA) = A$. Donc g est une symétrie.

On détermine $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a $A \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) \iff A = g(A)$

$\iff A = {}^tA$

$\iff A$ est symétrique.

Donc $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ est le sous-ev des matrices symétriques. Ce sous-ev est de dim $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi, $\det(g) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0 \bmod (4) \text{ ou } n \equiv 3 \bmod (4) \\ -1 \text{ si } n \equiv 1 \text{ ou } 2 \bmod (4). \end{cases}$

Exercice 9 :

- On a $$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \underbrace{a_{\sigma(i)i}}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Z}}$$ Donc, $\det(A)\in\mathbb{Z}$.

- Si A^{-1} est à coeffs entiers, on a $\det(A^{-1})\in\mathbb{Z}$.

Comme $\underbrace{\det(A)}_{\in\mathbb{Z}}\cdot\underbrace{\det(A^{-1})}_{\in\mathbb{Z}}=1$, on en déduit que

$\det(A)$ divise 1. Ainsi, $\det(A) = 1$ ou -1.

Exercice 10 :

On a $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

deux colonnes identiques

$$\det(A_4) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2$$

$$= (-1)^2 = 1.$$

Soit $n \geq 3$.

On a :

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_{n-2} \end{vmatrix} = \det(A_2)\det(A_{n-2})$$

$$= -\det(A_{n-2}).$$

On démontre par récurrence sur $n \geqslant 2$ que :

$$\det(A_n) = \begin{cases} \det(A_2)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$