FEUILLE DE TD N° 2

Déterminant

23 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les mineurs $\Delta_{2,2}$ et $\Delta_{1,3}$.
Calculer $\det(A)$ en effectuant un développement selon la première ligne.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$.
- On définit l'endomorphisme $f : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X.P'(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\det(f)$.
- On définit l'endomorphisme $g : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\det(g)$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $A_n = (i+j)_{(i,j)}$.
- Calculer $\det(A_2), \det(A_3)$.
- Montrer que A_n n'est pas inversible pour tout $n \geq 3$.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Soit $A_n = (\max(i,j))_{(i,j)}$.
- Calculer $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.
- Calculer $\det(A_n)$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$.
On définit la matrice $A_\tau \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $a_{i,j} = \delta_{i,\tau(j)}$.
Montrer que $\det(A_\tau) = \varepsilon(\tau)$.

Exercice 8. Soit E un e.v. de dimension n, $n \geq 1$. Soit $s : E \to E$ une symétrie.
- Exprimer $\det(s)$ en fonction de $\dim(Ker(s - Id))$ ou $\dim(Ker(s + Id))$.
- Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit l'endomorphisme f par $f(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = a_n + a_{n-1}X + \ldots + a_0X^n$.
Calculer $\det(f)$.
- Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme g par $g(A) = {}^t(A)$.
Calculer $\det(g)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ à coefficients entiers.
- Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
- On suppose que A est inversible et que A^{-1} est à coefficients entiers.
Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 10. Soit $n \geq 2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $\det(A_3)$ et $\det(A_4)$.
- En déduire $\det(A_n)$.

Un peu de produit scalaire . . .

Exercice 11. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A \cdot {}^tB),$$

où Tr est la trace et ${}^tB$ est la transposée de B.

1. Montrer que $\varphi(A, A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Exprimer $\|A\|$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le n \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.
5. Montrer que $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

Indications

Exercice 2
On cherchera à utiliser des factorisations/opérations sur les lignes/opérations sur les colonnes le plus possible.

Exercice 3
Ecrire la matrice de f (et g) dans une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4
On cherchera à calculer un déterminant.
Utiliser des opérations sur les lignes/colonnes.

Exercice 5
On cherchera à se ramener à $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$.

Exercice 7
On utilisera un résultat qui contient des permutations.

Exercice 8
On pourra montrer que f et g sont des symétries.

Exercice 10
Utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes.