Feuille de TD n° 3

Déterminant, Spectre

25 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Résoudre l'équation $\det(\lambda I_3 - A) = 0$.
- Si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$, que peut-on dire sur $\operatorname{Ker}(\lambda I_3 - A)$?
- En déduire $\operatorname{Spec}(A)$.

On calcule :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -2\lambda \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I_3 - A) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{=} \lambda \begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 & 0 \\ 5 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda.1.1.((\lambda+2)(\lambda-2)+10) = \lambda(\lambda^2-4+10)$$

Donc, on a $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ si et seulement si $\lambda(\lambda^2 - 6) = 0$. Les solutions sont 0, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$.
- Si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$, on sait alors que la matrice $\lambda I_3 - A$ n'est pas inversible. Or, une matrice carrée n'est pas inversible si et seulement si elle n'est pas injective. Donc, on a $\operatorname{Ker}(\lambda I_3 - A) \neq \{0\}$. Ainsi, les solutions de l'équation sont des valeurs propres pour A.
- Réciproquement, si λ est une valeur propre pour A, alors $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, et donc $\det(\lambda I_3 - A) = 0$. Ainsi, $\operatorname{Spec}(A) = \{0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- Résoudre l'équation $AX = Y$ avec la méthode de Cramer.

On a $\det(A) = -2 - 15 = -17 \neq 0$, donc A est inversible. On peut appliquer la méthode de Cramer.
L'équation $AX = Y$ admet ainsi une unique solution X, et ses coefficients valent :

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)}.\begin{vmatrix} y_1 & 3 \\ y_2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{17}(2y_1 - 3y_2) = \frac{-2y_1 + 3y_2}{17}.$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)}.\begin{vmatrix} -1 & y_1 \\ 5 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{17}(-y_2 - 5y_1) = \frac{5y_1 + y_2}{17}.$$

Note : Comme A est inversible, on a $AX = Y$ si et seulement si $X = A^{-1}Y$, avec $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. On retrouve alors le même résultat.

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$).
- On suppose que n est impair. Montrer que $\det(A) = 0$.
- Si n est pair, est-ce que cela est encore vrai ?

- On a $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Si n est impair, on obtient donc $\det(A) = -\det(A)$, donc $2\det(A) = 0$, c'est-à-dire $\det(A) = 0$.
- Si n est pair, $n = 2k$, la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et inversible.

Son déterminant est donc non-nul. (d'après le TD 2, on a $\det(A) = (-1)^k \det(I_k)\det(-I_k) = (-1)^k.(-1)^k = 1$)

Exercice 4. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

— En développant selon la première ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc.$$

— On cherche à se ramener à un déterminant de Vandermonde. On commence par effectuer

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Puis, on effectue $C_1 \leftarrow C_2 + C_3$. Cela donne :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On peut alors factoriser C_1 par 2 et effectuer $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, pour obtenir :

$$D = 2\begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

On peut se ramener ainsi à un déterminant de Vandermonde :

$$D = 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a).$$

Exercice 5. Soit $n \geq 1$. On définit : $A_n = (1) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Calculer $\det(A_3 - \lambda I_3)$, puis $\det(A_n - \lambda I_n)$.
• En déduire $\mathrm{Spec}\,(A_n)$.
• Pour $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A_n)$, déterminer $E_\lambda(A_n)$.

• On calcule :

$$\det(A_n - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_n \leftarrow C_n + C_{n-1} + \ldots + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & & n-\lambda \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & n-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (n-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_i \leftarrow L_i - L_n \, \forall 1 \leq i \leq n-1}{=} (n-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-\lambda).(-1)^{2n}.1.\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1} = (-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - n)$$

• On a vu dans d'autres exercices que $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A_n)$ si et seulement si $\det(A_n - \lambda I_n) = 0$. Donc, $\mathrm{Spec}\,(A_n) = \{0, n\}$.
• Détermination de $E_0(A_n)$. On remarque que la matrice A_n est de rang 1, donc $E_0(A_n) = \mathrm{Ker}\,(A_n)$ est de dimension $n-1$.
Pour $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on remarque que $e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_{n-1}$ sont des vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(A_n)$. Cette famille est de plus libre, donc $E_0(A_n) = \mathrm{Vect}\, e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_{n-1}$.
Détermination de $E_n(A_n)$. Soit X un vecteur propre de A_n de valeur propre n. On a alors $A_nX = nX$. On obtient donc : $x_1 + \ldots + x_n = n.x_i$, pour $1 \leq i \leq n$.
On montre alors que $A_nX = nX$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, si et seulement si $X \in \mathrm{Vect}\, e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.
Donc, $E_n(A_n) = \mathrm{Vect}\, e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme 1 $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.
2. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}\,(AB) = \mathrm{com}\,(A)\,\mathrm{com}\,(B)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}\,(AB) = \mathrm{com}\,(A)\,\mathrm{com}\,(B)$.

---

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Trouvons une suite $(A_m) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.
On définit la fonction
$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n).$$
Cette fonction est un polynôme en x de degré n. Donc elle s'annule en au plus n points. Ainsi, $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}, p(x) \neq 0$, c'est-à-dire que $A + xI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $N > \frac{1}{\epsilon}$. Alors, $\forall m > N$ on a $\frac{1}{m} < \epsilon$, donc $A_m = A + \frac{1}{m}I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus (A_m), converge vers A pour la norme 1, ce qui conclut.

2. On a A et B inversibles, donc AB est inversible. En regardant leurs inverses, on obtient :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} {}^t\text{com}\,(AB) = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t\text{com}\,(B)\, \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}\,(A)\,.$$

En passant à nouveau à la transposée, on obtient :

$$\text{com}\,(AB) = \text{com}\,(A)\,\text{com}\,(B)\,.$$

3. Ici, A et B ne sont pas forcément inversibles. D'après la première question, pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p}I_n \quad \text{et} \quad B + \frac{1}{p}I_n$$

sont inversibles. On a donc

$$\text{com}\left((A + \frac{1}{p}I_n)(B + \frac{1}{p}I_n)\right) = \text{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\text{com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right).$$

Or, pour M une matrice, les coefficients de $\text{com}\,(M)$ sont des polynômes en les $m_{i,j}$ de degré au plus $n-1$. Les coefficients de $\text{com}\,(M)$ sont donc des fonctions continues en les $m_{i,j}$. Comme les coefficients de $A + \frac{1}{p}I_n$ convergent vers les coefficients de A quand $p \to +\infty$, on obtient donc que les coefficients de $\text{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$ convergent vers les coefficients de $\text{com}\,(A)$, par continuité. (Cela fait une convergence pour la norme 1 des matrices)
Ainsi, on peut passer à la limite quand $p \to +\infty$, ce qui donne :

$$\text{com}\,(AB) = \text{com}\,(A)\,\text{com}\,(B)\,.$$

Exercice 7.

1. Montrer que la famille de polynômes

$$\left(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2\right)$$

est liée.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

---

1. Ces 4 polynômes sont dans $\mathbb{C}_3[X]$, qui est de dimension 3. Cette famille est donc forcément liée.

2. D'apres (1), $\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ tel que

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x+1)^2 + \lambda_3(x+2)^2 + \lambda_4(x+3)^2 = 0.$$

Pour $x = a, b, c$ puis d, cela donne :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \\ d^2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} (a+1)^2 \\ (b+1)^2 \\ (c+1)^2 \\ (d+1)^2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} (a+2)^2 \\ (b+2)^2 \\ (c+2)^2 \\ (d+2)^2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} (a+3)^2 \\ (b+3)^2 \\ (c+3)^2 \\ (d+3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible car ses vecteurs colonne forment une famille liée. Donc $D = \det {}^tM = \det M = 0$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que $2^{n-1} \mid \det A$.

Soit $2 \leq i \leq n$. En effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + C_1$, les coefficients de la colonne C_i sont alors à valeurs dans $\{-2, 0, 2\}$. On peut alors factoriser tous ces coefficients par 2 et obtenir une colonne à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.
En effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + C_1$ pour tout $2 \leq i \leq n$, les colonnes $C_2, \ldots, C_n$ auront toutes des coefficients dans $\{-2, 0, 2\}$, et seront toutes factorisables par 2.
On obtient donc $\det(A) = 2^{n-1}\det(B)$, où B est une matrice dont les coefficients sont dans $\{-1, 0, 1\}$. Comme A et B sont à coefficients entiers, leurs déterminants sont des entiers. D'oû $2^{n-1} | \det(A)$.

Indications

Exercice 4
On pourra chercher à se ramener à une matrice de Vandermonde.

Exercice 6
2) Quelles sont les propriétés de $\mathrm{com}\,(A)$? 3) Utiliser les questions précédentes.

Exercice 8
Utiliser des opérations sur les colonnes.