Feuille de TD n° 3

Déterminant, Spectre

25 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Résoudre l'équation $\det(\lambda I_3 - A) = 0$.
- Si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$, que peut-on dire sur $\operatorname{Ker}(\lambda I_3 - A)$?
- En déduire $\operatorname{Spec}(A)$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

- Résoudre l'équation $AX = Y$ avec la méthode de Cramer.

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$).

- On suppose que n est impair. Montrer que $\det(A) = 0$.
- Si n est pair, est-ce que cela est encore vrai ?

Exercice 4. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $n \geq 1$. On définit : $A_n = (1) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Calculer $\det(A_3 - \lambda I_3)$, puis $\det(A_n - \lambda I_n)$.
- En déduire $\operatorname{Spec}(A_n)$.
- Pour $\lambda \in \operatorname{Spec}(A_n)$, déterminer $E_\lambda(A_n)$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme 1 $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.
2. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{com}(AB) = \operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{com}(AB) = \operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B)$.

Exercice 7.

1. Montrer que la famille de polynômes
$$\big(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2\big)$$
est liée.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant suivant est nul :
$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que $2^{n-1} \mid \det A$.

Indications

Exercice 4
On pourra chercher à se ramener à une matrice de Vandermonde.

Exercice 6
2) Quelles sont les propriétés de $\mathrm{com}\,(A)$? 3) Utiliser les questions précédentes.

Exercice 8
Utiliser des opérations sur les colonnes.