Feuille de TD n° 4

Valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique

4 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer χ_A et Spec (A).

Remarque : Calculer $\chi_A(X)$ et le factoriser nous donne Spec (A). A l'opposé, trouver des vecteurs propres "simples" pour A et leurs valeurs propres associées donne de l'information que $\chi_A(X)$.
De même, $Tr(A)$ et $\det(A)$ permettent de déduire certaines racines de χ_A.
Le but de tous ces résultats est d'avoir une méthode assez générale qui permet de calculer ce que l'on désire, et plein de petites techniques rapides qui permettent d'obtenir le résultat plus rapidement.
• On peut commencer par tester si des vecteurs comme $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$,... sont des vecteurs propres.

On remarque que pour $u = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, on a $Au = -2u$ et $Av = 3v$.
Ainsi, on a $\{-2, 3\} \subset$ Spec (A), et $(X+2)(X-3) | \chi_A(X)$.
Comme $\chi_A(X)$ est unitaire et de degré 3, on a $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)(X-b)$.
On a alors $2 - 3 - b = Tr(A) = -4$. On en déduit que $b = 3$, c'est-à-dire $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)^2$.
On en déduit aussi que Spec $(A) = \{-2, 3\}$.
Autre résolution par un calcul de déterminant : On calcule :

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3+\alpha & 5-\alpha & -\alpha \\ \alpha & X+2-\alpha & -\alpha \\ -5 & 5 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X) \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X+2 & 5-\alpha & -\alpha \\ X+2 & X+2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 5 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (X+2) \begin{vmatrix} 1 & 5-\alpha & -\alpha \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 5 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2).1. \begin{vmatrix} X-3 & 0 \\ 5 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-3).$$

On retrouve ainsi $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)^2$ et Spec $(A) = \{-2, 3\}$.

Exercice 2. Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$f(P(X)) = (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X).$$

1. Calculer $\chi_f(X)$ et Spec (f).
2. Déterminer le noyau de f.
3. On se place dans le cas où $n = 2$.
   Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

---

1. Dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on a : $f(X^0) = 0$, $f(X^1) = 2X+1$ et, $f(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$, $\forall 2 \le k \le n$. Pour A la matrice de f dans la base canonique, on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 2 & 2 & & & * \\ 0 & 0 & 2\times 3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

   Comme la matrice A est triangulaire supérieure, an en déduit que $\chi_f(X) = \chi_A(X) = \pi_{k=0}^{n}(X - k(k+1))$. Le spectre de A est donc Spec $(A) = \{0, 2, 2\times 3, \cdots, n(n+1)\}$. La matrice A est de taille $n+1$ et elle possède $n+1$ valeurs propres distinctes.
2. D'une part, on a $f(1) = 0$, d'où $X^0 \in \mathrm{Ker}(f)$.
   D'autre part, pour $k \ge 1$ on a $\deg(f(X^k)) = k$. Donc, pour tout polynôme P de degré 1 ou plus, on a $\deg(f(P)) = \deg(P) > 0$. On en déduit donc que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1)$, le sous-e.v. des polynômes constants.
3. Quand $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et Spec $(A) = \{0, 2, 6\}$.
   On va utiliser la forme triangulaire supérieure de A pour trouver des vecteurs propres associés à chacune de ses valeurs propres (0,2 et 6).
   Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On a $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = 2e_2 + e_1$ et $Ae_3 = 6e_3 + 2e_2 - 2e_1$.

Ainsi, pour $X_1 = e_1$, on a $AX_1 = 0$.
Ensuite, pour $X_2 = e_2 + \frac{1}{2}e_1$, on remarque que l'on a $AX_2 = 2e_2 + e_1 + 0 = 2X_2$.
En posant $X_3 = e_3 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{4}e_1$, on obtient $AX_3 = 6e_3 + 3e_2 - \frac{3}{2}e_1 = 6X_3$.

Comme un vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ représente le polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que la famille $(1, 1+2X, 1-2X-4X^2)$ est une famille de vecteurs propres pour f. Les polynômes de cette famille ayant tous des degrés différents, cette famile est libre, et possède 3 polynômes. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3. Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que :
   Si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question est encore vraie pour $\lambda = 0$.
3. On prend maintenant $E = \mathbb{R}[X]$.
   On pose $u(P) = P'$ l'endomorphisme de dérivation, et v l'endomorphisme de primitivation ($v(1) = X$ et $v(X^k) = \frac{1}{k+1}X^{k+1}$).
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

---

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Il existe un vecteur $x \in E$ non-nul tel que $u(v(x)) = \lambda x$. D'où : $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v(x) \neq 0$ car $u(v(x)) \neq 0$. Donc λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Si 0 est une valeur propre de $u \circ v$, alors $\det(u \circ v) = 0$. Or $\det(u \circ v) = \det(v \circ u)$. D'où $\det(v \circ u) = 0$. Donc 0 est une valeur propre de $v \circ u$.
3. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $u \circ v(P)(X) = P(X)$ et $v \circ u(P)(X) = P(X) - P(0)$.
   Ainsi, on a : $\mathrm{Ker}(u \circ v) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$.
   0 est donc une valeur propre de $v \circ u$, mais pas de $u \circ v$.
   Donc, le résultat de la question précédente est faux en général en dimension infinie.

Exercice 4. 1. Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de J.
   (b) En déduire les valeurs propres complexes de la matrice J.
   (On notera j le nombre complexe $e^{i2\pi/3}$.)
   (c) Déterminer une base B de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de J.
   (d) Pour $f : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto J.X \in \mathbb{C}^3$, donner l'écriture de $Mat_B(f)$.

2. Pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice
$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que la matrice $A(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de I_3, J et J^2.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de J est aussi un vecteur propre de $A(x, y, z)$.
   (c) Que valent $\mathrm{Spec}\,(A(x, y, z))$ et $\chi_{A(x,y,z)}$?
   (d) Montrer que toutes toutes les valeurs propres de $A(x, y, y)$ sont réelles.

---

1. (a) Le polynôme caractéristique de la matrice J est
$$\det(XI_3 - J) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 1.$$
   (b) Les valeurs propres complexes de la matrice J sont les trois racines cubiques de l'unité : 1, j et j^2.
   (c) Trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres 1, j et j^2 sont respectivement :
$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$
   Ces trois vecteurs forment bien une base de $\mathbb{C}^3$ car le déterminant $\det(V_1, V_2, V_3)$ n'est pas nul.
   (d) Par définition de f, on a $f(V_0) = V_0$, $f(V_1) = jV_1$, et $f(V_2) = j^2V_2$. Ainsi, la matrice de f dans la base $B = (V_0, V_1, V_2)$ est diagonale : $Mat_B(f) = \mathrm{Diag}\,(1, j, j^2)$.
2. (a) La matrice J^2 s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $A(x, y, z) = xI_3 + yJ + zJ^2$.

(b) Soit V un vecteur propre de J pour la valeur propre λ : $J \cdot V = \lambda \cdot V$.
On a alors $J^2 \cdot V = \lambda^2 \cdot V$, d'où

$$A(x,y,z)\cdot V = xI_3\cdot V + yJ\cdot V + zJ^2\cdot V = x\cdot V + y\lambda\cdot V + z\lambda^2\cdot V = (x+\lambda y+\lambda^2 z)\cdot V.$$

Donc V est aussi un vecteur propre de la matrice $A(x,y,z)$ pour la valeur propre $x+\lambda y+\lambda^2 z$.

(c) En posant $g : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto A(x,y,z)X$, on a alors $g = x.Id + y.f + z.f^2$.
Donc, d'après une question précédente, on a

$$\begin{aligned} Mat_B(g) &= x.Mat_B(Id) + y.Mat_B(f) + z.Mat_B(f^2) \\ &= x.I_3 + y.\operatorname{Diag}\left(1,j,j^2\right) + z.\operatorname{Diag}\left(1,j,j^2\right)^2 \\ &= \operatorname{Diag}\left(x+y+z, x+jy+j^2z, x+j^2y+jz\right). \end{aligned}$$

On en déduit donc que
$\chi_{A(x,y,z)}(X) = \chi_g(X) = (X-(x+y+z))(X-(x+jy+j^2z))(X-(x+j^2y+jz))$
et que $\operatorname{Spec}(A(x,y,z)) = \{x+y+z, x+jy+j^2z, x+j^2y+jz\}$.

(d) Si $y=z$, alors les valeurs propres de A sont (en utilisant $1+j+j^2=0$) :

$$x+2y \quad , \quad x+jy+j^2z = x+y(j+j^2) = x-y \quad \text{et} \quad x+jz+j^2y = x-y.$$

Elles sont toutes réelles.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$

- Montrer que $u = {}^t(1,1,1)$ est un vecteur propre de A. Déterminer χ_A et $\operatorname{Spec}(A)$.
- On suppose que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq b$. Trouver des vecteurs propres w, v pour les valeurs propres $-a$ et $-b$.
- La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
- Que trouve-t-on si $a = 0$ ou $b = 0$?

• Pour $X = {}^t(1,1,1)$, on a $AX = (a+b)X$, donc X est un vecteur propre de A.
On a aussi $Tr(A) = 0$.
Connaître ce vecteur propre nous aide à calculer le polynôme caractéristique de A, en faisant sortir $(X-a-b)$ en facteur. Cela donne :

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -a & -b \\ -a & X & -b \\ -a & -b & X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} (X-a-b)\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ 1 & X & -b \\ 1 & -b & X \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (X-a-b)\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & X+a & 0 \\ 0 & -b+a & X+b \end{vmatrix} = (X-a-b)(X+a)(X+b).$$

Ainsi, $\operatorname{Spec}(A) = \{a+b, -a, -b\}$.
En développant χ_A on retrouve le fait que $Tr(A) = 0$, et on trouve que $\det(A) = -(a+b)ab$.
• On cherche un vecteur propre pour la valeur propre $-a$, et un vecteur propre pour la valeur propre $-b$. Comme ces deux valeurs propres sont différentes, on aura bien deux vecteurs propres différents.
Chercher un vecteur propre pour $-a$ revient à trouver une solution $AX = -aX$, c'est-à-dire à trouver des vecteurs dans le noyau de la matrice

$$A + aI_3 = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}.$$

Comme $a \neq 0$ et $a \neq b$, la méthode du Pivot nous permet de trouver que $\operatorname{Ker}(A+aI_3) = E_{-a}(A) = \operatorname{Vect}{}^t(-\frac{a+b}{a}, 1, 1)$.
Quitte à multiplier par a, on obtient que $v = {}^t(-a-b, a, b)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $-a$.
Chercher un vecteur propre pour $-b$ revient à trouver un vecteur dans le noyau de

$$A + bI_3 = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix}.$$

Comme $b \neq 0$ et $a \neq b$, la méthode du Pivot nous permet de trouver que $\operatorname{Ker}(A+bI_3) = E_{-b}(A) = \operatorname{Ker}\left({}^t(1,1,-\frac{a+b}{b})\right)$.
Quitte à multiplier par b, on obtient que $w = {}^t(b, b, -a-b)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $-b$.

• On veut savoir si (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. On calcule le déterminant de cette famille. Cela donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & -a-b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & a & -a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a-b & b \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 2a+b & -a-2b \end{vmatrix} = 1.1.(2a+b)(-a-2b) = -(2a+b)(a+2b).$$

La famille (u, v, w) est donc une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $2a+b \neq 0$ et $a+2b \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a+b \neq -a$ et $a+b \neq -b$. Cette famille de vecteurs propres de A est une base de $\mathbb{R}^3$ lorsque les valeurs propres $a+b, -a, -b$ sont distinctes.

• Si $a = b = 0$ on a $A = 0$. Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont donc des vecteurs propres de A, et toute base de $\mathbb{R}^3$ est une base de vecteurs propres de A.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a ${}^t(-a-b, a, a) = -b{}^t(1,0,0)$ et ${}^t(b, b, -a-b)) = b{}^t(1,1,-1))$.
On vérifie immédiatement que ces deux nouveaux vecteurs sont encore des vecteurs propres de A.
Si $b = 0$ et $a \neq 0$, on a ${}^t(-a-b, a, a) = -a{}^t(-1,1,1)$ et ${}^t(b, b, -a-b)) = a{}^t(0,0,1))$.
On vérifie immédiatement que ces deux nouveaux vecteurs sont encore des vecteurs propres de A.

Les familles $((1,1,1),(1,0,0),(1,1,-1))$ et $((1,1,1),(0,0,1),(-1,1,1))$ sont libres car leurs déterminants sont non-nuls (développement selon la 2e colonne), et on obtient à nouveau des bases de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs propres de A.
Finalement, on a pu obtenir des bases de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs propres de A, sauf lorsque $(a+b=-a$ ou $a+b=-b)$ et $(a\neq 0$ ou $b\neq 0)$.

Exercice 6. Soient $n\geq 1$, $\mathbb{K}$ un corps, et $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— On suppose que A est inversible. Montrer que $\chi_{AB}(X)=\chi_{BA}(X)$.
— On suppose que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$ et que A est quelconque. Montrer que $\chi_{AB}(X)=\chi_{BA}(X)$.
— On suppose que $\mathbb{K}$ est quelconque. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$.
Montrer, en calculant de deux façons différentes $\det(\begin{pmatrix}\lambda I_n & A\\ B & I_n\end{pmatrix})$, que $\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda)$.

— Comme A est inversible, on a :
$$\chi_{AB}(X)=\det(XI_n-AB)=\det(A^{-1}(XI_n-AB)A)=\det(XI_n-BA)=\chi_{BA}(X),$$
d'après les propriétés du déterminant (invariance par similitude).
— Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On va montrer que $\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda)$.
Pour $z\in\mathbb{K}$ on pose $A(z)=A-zI_n$. La fonction $z\mapsto\det(A(z))$ est un polynôme en z de degré n. Ce polynôme possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$, il possède une infinité d'éléments. Donc, pour une infinité de $z\in\mathbb{K}$, la matrice $A(z)$ est inversible. D'après le premier point, on obtient :
$$\chi_{A(z)B}(\lambda)=\det(\lambda I_n-(A-zI_n)B)=\chi_{BA(z)}(\lambda)=\det(\lambda I_n-B(A-zI_n)).$$
Donc, les fonctions polynômiales $f:z\mapsto\det(\lambda I_n-(A-zI_n)B)$ et $g:z\mapsto\det(\lambda I_n-B(A-zI_n))$ sont égales en une infinité de nombres z. Comme $g-f$ est une fonction polynômiale qui s'annule en une infinité de points, on a donc $f-g=0$ c'est-à-dire $f=g$.
On obtient en particulier que $f(0)=g(0)$, c'est-à-dire $\det(\lambda I_n-AB)=\det(\lambda I_n-BA)$.
Comme cela est vrai pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, les polynômes $\chi_{AB}(X)$ et $\chi_{BA}(X)$ sont égaux, ce qui conclut.
Autre solution : Fixons la matrice B. D'après l'expression du déterminant, $P_A(X)=\det(XI_n-AB)-\det(XI_n-BA)$ est un polynôme de degré au plus n, et dont les coefficients sont des polynômes en les $a_{i,j}$. Les coefficients du polynôme P_A sont donc des fonctions continues en les coefficients de la matrice A.
La fonction $A\mapsto P_A(X)$ est donc une fonction continue de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$ vers $(\mathbb{K}_n[X],\|.\|_\infty)$.
Prenons $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Comme les matrices inversibles sont denses dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour la norme $\|.\|_\infty$, il existe une suite A_n de matrices inversibles qui converge vers A en norme infinie. Par continuité, on a donc $0=P_{A_n}(X)\to_{n\to+\infty}P_A$. D'où $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.
— On calcule le déterminant de la matrice $M=\begin{pmatrix}\lambda I_n & A\\ B & I_n\end{pmatrix}$ via la méthode du Pivot sur les lignes, en se servant de λI_n et de I_n, pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure par bloc (pour la trigonaliser). On a :
$$\begin{pmatrix}\lambda I_n & A\\ B & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ -B & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I_n-AB & A\\ 0 & \lambda I_n\end{pmatrix}$$
On obtient ainsi $\det(M)=\chi_{AB}(\lambda)$.
On calcule une deuxième fois le déterminant de la matrice $M=\begin{pmatrix}\lambda I_n & A\\ B & I_n\end{pmatrix}$ via la méthode du Pivot sur les colonnes, en se servant de λI_n et de I_n, pour se ramener à une matrice triangulaire inférieure par bloc (pour la trigonaliser). On a :
$$\begin{pmatrix}\lambda I_n & A\\ B & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I_n & -A\\ 0 & \lambda I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I_n & 0\\ B & -BA+\lambda I_n\end{pmatrix}$$
On obtient ainsi $\lambda^n\det(M)=\lambda^n\chi_{BA}(\lambda)$.
Si $\lambda\neq$ on a $\det(M)=\chi_{BA}(\lambda)$.
Si $\lambda=0$, le premier calcul donne $\det(M)=\chi_{AB}(0)=\det(-AB)=\det(-BA)=\chi_{BA}(0)$.
On a donc bien que $\chi_{BA}(\lambda)=\chi_{AB}(\lambda)$, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$.
Attention : Pour un corps $\mathbb{K}$ qui est un corps avec un nombre fini d'éléments (par exemple $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), le fait que $P(\lambda)=Q(\lambda)$ pour tout λ n'implique pas que $P(X)=Q(X)$ (par exemple avec $P(X)=X^2+X$, $Q(X)=0$, $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Indications

Exercice 4

2.c) On pourra poser $g : X \mapsto A(x, y, z)X$ et exprimer g en fonction de f.

Exercice 6

2) On pourra poser $A(z) = A + zI_n$ et étudier $\chi_{BA(z)}$.