Feuille de TD n° 4

Valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique

4 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer χ_A et Spec (A).

Exercice 2. Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$f(P(X)) = (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X).$$

1. Calculer $\chi_f(X)$ et Spec (f).
2. Déterminer le noyau de f.
3. On se place dans le cas où $n = 2$.
   Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

Exercice 3. Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que :
   Si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question est encore vraie pour $\lambda = 0$.
3. On prend maintenant $E = \mathbb{R}[X]$.
   On pose $u(P) = P'$ l'endomorphisme de dérivation, et v l'endomorphisme de primitivation ($v(1) = X$ et $v(X^k) = \frac{1}{k+1}X^{k+1}$).
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

Exercice 4. 1. Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de J.

(b) En déduire les valeurs propres complexes de la matrice J.
(On notera j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$.)

(c) Déterminer une base B de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de J.

(d) Pour $f : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto J.X \in \mathbb{C}^3$, donner l'écriture de $Mat_B(f)$.

2. Pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice

$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que la matrice $A(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de I_3, J et J^2.

(b) En déduire que tout vecteur propre de J est aussi un vecteur propre de $A(x, y, z)$.

(c) Que valent Spec $(A(x, y, z))$ et $\chi_{A(x,y,z)}$?

(d) Montrer que toutes toutes les valeurs propres de $A(x, y, y)$ sont réelles.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$

• Montrer que $u = {}^t(1, 1, 1)$ est un vecteur propre de A. Déterminer χ_A et Spec (A).
• On suppose que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq b$. Trouver des vecteurs propres w, v pour les valeurs propres $-a$ et $-b$.
• La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
• Que trouve-t-on si $a = 0$ ou $b = 0$?

Exercice 6. Soient $n \geq 1$, $\mathbb{K}$ un corps, et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- On suppose que A est inversible. Montrer que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.
- On suppose que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$ et que A est quelconque. Montrer que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.
- On suppose que $\mathbb{K}$ est quelconque. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

  Montrer, en calculant de deux façons différentes $\det(\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix})$, que $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.

Indications

Exercice 4

2.c) On pourra poser $g : X \mapsto A(x, y, z) \cdot X$, et exprimer g en fonction de f.

Exercice 6

2) On pourra poser $A(z) = A + zI_n$ et étudier $\chi_{BA(z)}$.
3) On pourra multiplier la matrice par des matrices triangulaires pour se ramener à une matrice triangulaire.