Feuille de TD n° 5

Polynôme caractéristique, sous-espaces stables

14 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mathrm{Spec}\,(A)$, χ_A, et les sous-espaces $E_\lambda(A)$.
Trouver un vecteur $X \in \mathbb{K}^2$ tel que $S_u(X) = \mathbb{K}^2$.

On remarque que la somme des vecteurs colonne de A est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $Au = 3u$. u est un vecteur propre de A et 3 est une valeur propre de A.
On a $Tr(A) = 4$ et $\det(A) = 4 - 1 = 3$. Les valeurs propres de A sont donc 3 et 1.
On en déduit donc que $\chi_A(X) = (X-1)(X-3) = X^2 - 4X + 3$.
On a ainsi $m_A(3) = 1 = m_A(1)$. Comme on a $1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_A(\lambda)$, on en déduit donc que les sous-espaces propres $E_3(A)$ et $E_1(A)$ sont de dimension 1.
Ainsi, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\,(u)$.
Cherchons un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 afin de déterminer $E_1(A)$.
Un test rapide de certains vecteurs montre que pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $Av = v$.
Ainsi, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(v)$.

Pour $X \in \mathbb{K}^2$ un vecteur non-nul, le sous-espace cyclique $S_A(X)$ est de dimension 1 ou 2. S'il est de dimension 1, cela veut dire que X est un vecteur propre de A.
Or, on connaît tous les vecteurs propres de A. En prenant par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, X n'est pas un vecteur propre de A, $S_A(X)$ est donc de dimension 2. On a ainsi $S_A(X) = \mathbb{K}^2$.
Remarque : Dans cet exercice, on peut utiliser toutes les méthodes "générales" vues en cours pour déterminer les quantitées demandées (polynôme caractéristique, puis spectre, puis sous-espaces propres,...). Mais le cours contient beaucoup de petites propriétés qui permettent d'aller plus vite et de faire moins de calculs (trouver des vecteurs propres "simples", raisonnements sur la dimension de $E_\lambda(A)$, raisonnements avec $\det(A)$ et $Tr(A)$, raisonnements sur le degré de χ_A, raisonnements sur la dimension de $S_A(X)$,...). Cette correction utilise principalement cela.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.

- Déterminer $\chi_A(X)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A, déterminer $E_\lambda(A)$.
- Trouver des vecteurs X tels que $\dim(S_A(X)) = 2$ et 4.

• La matrice A est une matrice de permutation. C'est la matrice associée à la permutation $\sigma = (1,2,3,4)$. Cette matrice est de trace nulle, et son déterminant vaut $\epsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$.
On calcule $\det(XI_4 - A)$ en effectuant un développement selon la première colonne. On obtient alors que $\chi_A(X) = \det(XI_4 - A) = X^4 - 1$.
Ainsi, on a $\chi_A(X) = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$.
On a donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{-1, 1, r, -r\}$ s'il existe un nombre $r \in \mathbb{K}$ tel que $r^2 = -1$, et $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{-1, 1\}$ sinon.
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. On a donc $\lambda = 1$ ou -1. Comme $\mu_1(A) = 1 = \mu_{-1}(A)$, les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.
On remarque que la somme des colonnes de A est un vecteur dont toutes les coordonnées sont égales. Ainsi, pour $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AX_1 = X_1$.

Comme A est la matrice de permutation associée à $\sigma = (1,2,3,4)$, en prenant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient que $AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_2$.
On a donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(X_1)$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\,(X_2)$.

• En utilisant à nouveau les propriétés de A, on peut remarquer que pour $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

- La famille $(Y_1, A(Y_1))$ est libre et $A^2(Y_1) = -Y_1$. Donc $S_A(Y_1)$ est de dimension 2.
- La famille $(Y_2, A(Y_2), A^2(Y_2), A^3(Y_2))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^4$, donc $S_A(Y_2) = \mathbb{K}^4$, de dimension 4.

Exercice 3. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.

• La matrice B possède-t-elle des sous-espaces stables de dimension 3 ?

La matrice B est diagonale par blocs. Pour $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $B = \text{Diag}\,(C, -C)$.
Ainsi, on a $\chi_B(X) = \chi_C(X)\chi_{-C}(X) = (X^2 + 0 + 1)(X^2 + 0 + 1) = (X^2 + 1)^2$.
Pour F un sous-espace stable par B, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur F est de degré $\dim(F)$ et divise χ_B.
- Si le corps $\mathbb{K}$ possède un nombre r tel que $r^2 = -1$ (par exemple $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), on a alors $\chi_B(X) = (X - r)^2(X + r)^2$. Dans ce cas χ_B possède des diviseurs de degré 3.
Dans un tel corps, le polynôme caractéristique de la matrice C est $(X - r)(X + r)$. Ainsi, les matrices C et $-C$ possèdent des vecteurs propres pour les valeurs propres r et $-r$.
En prenant $F = \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de C, F est alors un sous-espace stable par B de dimension 3.
- Si dans le corps $\mathbb{K}$ le nombre -1 n'est pas un carré (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$), alors χ_B ne possède que des diviseurs de degré 0, 2 et 4. La matrice B ne possède ainsi pas de sous-espaces stables de dimension 3.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient f, p deux endomorphismes de E, avec p une projection.
Montrer que l'on a $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $Im(p)$ et $\text{Ker}\,(p)$ sont stables par f.

Si f commute avec p, alors $\text{Ker}\,(p) = E_0(p)$ et $Im(p) = \text{Ker}\,(p - Id_E) = E_1(p)$ sont stables par f.
Réciproquement, on suppose que ces deux sous-espaces sont stables par f. Soit $x \in E$.
On a $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in Im(p)$ et $x - p(x) \in \text{Ker}\,(p)$.
On obtient alors $f(p(x)) \in Im(p)$ et $f(x - p(x)) \in \text{Ker}\,(p)$, ce qui donne :

$$p(f(x)) = p(f(p(x)) + f(x - p(x))) = p(f(p(x))) + p(f(x - p(x))) = f(p(x)) + 0 = f(p(x)).$$

On en déduit donc que $p \circ f = f \circ p$.
Autre méthode : Les sous-espaces $Im(p)$ et $\text{Ker}\,(p)$ sont stables par f et par p. On a $p_{Im(p)} = Id_{Im(p)}$ et $p_{\text{Ker}(p)} = 0_{\text{Ker}(p)}$. Donc, f commute avec p sur ces deux sous-espaces, c'est-à-dire que $f \circ p$ est égal à $p \circ f$ sur $Im(p)$ et sur $\text{Ker}\,(p)$.
Comme $f \circ p$ et $p \circ f$ sont des applications linéaires, cette égalité reste vraie sur $Im(p) + \text{Ker}\,(p)$.
Comme on a $E = Im(p) \oplus \text{Ker}\,(p)$, on obtient le résultat.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non-nulle telle que $Im(A)$ et $\text{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires.

1. Montrer que la matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A' \in \text{Gl}_r(\mathbb{K})$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace "$Im(A)$ et $\text{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires" par "$rg(A) = rg(A^2)$" ?

---

1. On note f l'application linéaire $X \mapsto AX$ sur $\mathbb{K}^n$. D'après les propriétés de A, les sous-espaces $Im(f)$ et $\text{Ker}\,(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.
Or, ces sous-espaces sont stables par f. Ainsi, en prenant une base B adaptée à la somme directe $\mathbb{K}^n = Im(f) \oplus \text{Ker}\,(f)$, la matrice de f dans la base B est diagonale par blocs. Comme on a aussi $f_{\text{Ker}(f)} = 0$, on obtient :
$$\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
avec $A' \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, pour $r = \dim(Im(f)) = rg(f) = rg(A)$.
Ainsi, la matrice A est semblable à cette matrice.
Comme le rang est un invariant de similitude, la matrice $\text{Mat}(f, B)$ est de rang $rg(A)$.
Cela veut dire que $rg(A') = rg(A) = r$.
La matrice A' étant dans $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, elle est donc inversible. On a obtenu la forme voulue.

2. La réponse est oui : les conditions "$Im(A)$ et $\text{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires" et "$rg(A) = rg(A^2)$" sont équivalentes.
En effet, l'application linéaire $g : X \in Im(A) \mapsto AX \in Im(A)$ a pour noyau $\text{Ker}\,(g) = Im(A) \cap \text{Ker}\,(A)$, et a pour image $Im(g) = A(Im(A)) = A(A(\mathbb{K}^n)) = A^2(\mathbb{K}^n) = Im(A^2)$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^2))$ si et seulement si $\dim(Im(A) \cap \text{Ker}\,(A)) = 0$. Comme $\dim(Im(A)) + \dim(\text{Ker}\,(A)) = n$ (d'après le théorème du rang), on en déduit que $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^2))$ si et seulement si $Im(A)$ et $\text{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme tel que $f^2 = -Id_E$.

1. Soit $x \in E$ non-nul. Montrer que $S_f(x)$ et est de dimension 2.
2. Soit F un sous-ev de E stable par f.
Montrer que l'on a soit $S_f(x) \subset F$, soit $S_f(x) \oplus F$.
3. Montrer par récurrence qu'il existe un entier r et des vecteurs $x_1, \ldots, x_r \in E$ tels que
$$E = S_f(x_1) \oplus S_f(x_2) \oplus \ldots \oplus S_f(x_r).$$
4. En déduire que E est de dimension paire, et qu'il existe une base B de E dans laquelle $\text{Mat}(f, B)$ est diagonale par blocs.

---

1. Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. On a $f^2(x) = -x$, donc $S_f(x)$ est de dimension 1 ou 2.
Si $S_f(x)$ est de dimension 1, alors x est un vecteur propre pour f. Or, la relation $f(x) = \lambda x$ donne $-x = f^2(x) = \lambda^2 x$, c'est-à-dire $(\lambda^2 + 1)x = 0$.
Comme on travaille sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'équation $\lambda^2 + 1$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$, et donc f n'a pas de vecteurs propres.
Ainsi, on a $\dim(S_f(x)) = 2$, et $S_f(x) = \text{Vect}\,(x, f(x))$.
2. On prend $x \in E$ non-nul et F un sous-ev de E stable par F.
Si $x \in F$ alors on a $S_f(x) = \text{Vect}\,(x, f(x)) \subset F$.
On suppose maintenant que $x \notin F$. Montrons que $S_f(x)$ est en somme directe avec F.
Soit $y \in S_f(x) \cap F$. On a $y = ax + bf(x)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Par stabilité par f, on a $f(y) \in S_f(x) \cap F$. Or, $f(y) = af(x) - bx$.
Ainsi, $ay - bf(y) = a^2x + b^2x$ appartient à $S_f(x) \cap F$. Mais $x \notin F$. On doit donc avoir $(a^2 + b^2)x = 0$.
Vu que $x \neq 0$, cela implique que $a^2 + b^2 = 0$, ce qui donne $a = b = 0$ car a et b sont réels.
Ainsi, on a $y = 0$, c'est-à-dire $S_f(x) \cap F = \{0\}$. Ces deux sous-ev sont donc en somme directe.
3. Pour montrer ce résultat, on va démontrer par récurrence la propriété suivante :
On pose (H_k) : Il existe $x_1, \ldots, x_k \in E$ non-nuls tels que $S_f(x_1), \ldots, S_f(x_k)$ sont en somme directe, ou bien, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $E = S_f(x_1) \oplus \ldots \oplus S_f(x_p)$.
- Initialisation : Pour $k = 1$, comme $\dim(E) = n > 0$, E possède des vecteurs non-nuls et la propriété (H_1) est vraie.
- Hérédité : Soit $k \geq 1$. On suppose que (H_k) est vraie. Montrons que (H_{k+1}) est vraie.
   — S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $E = S_f(x_1) \oplus \ldots \oplus S_f(x_p)$, alors l'hypothèse (H_{k+1}) est vérifiée.
   — Sinon, il existe alors $x_1, \ldots, x_k \in E$ non-nuls tels que $S_f(x_1), \ldots, S_f(x_k)$ sont en somme directe. On a de plus $E \neq S_f(x_1) \oplus \ldots S_f(x_k)$ car ce cas a déjà été traité. Ainsi, l'ensemble $E \setminus (S_f(x_1) \oplus \ldots S_f(x_k))$ est non-vide. Soit x_{k+1} un élément de cet ensemble. On voit que x_{k+1} est non-nul.
   D'après la question précédente les sous-ev stables par f $S_f(x_1) \oplus \ldots \oplus S_f(x_k)$ et $S_f(x_{k+1})$ sont en somme directe. Donc, les $k+1$ sous-ev $S_f(x_1), \ldots, S_f(x_{k+1})$ sont en somme directe. L'hypothèse (H_{k+1}) est vérifiée, et cela termine la récurrence.

   Pour $n = \dim(E)$, la propriété (H_n) est vraie. Comme la somme directe $S_f(x_1) \oplus \ldots \oplus S_f(x_n)$ serait de dimension $2n$, cette somme directe ne peut pas exister dans E, qui est de dimension n.
   On en déduit donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $E = S_f(x_1) \oplus \ldots \oplus S_f(x_p)$.
4. D'après les questions précédentes, on a $\dim(E) = 2p$, donc E est de dimension paire.
De plus, en prenant $B = (x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_p, f(x_p))$, B est une base de E.
Comme $S_f(x)$ est stable par f, la matrice de f dans cette base est une matrice diagonale par blocs. On a $Mat(f, B) = \text{Diag}\,(C, C, \ldots, C)$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et non-nulle. Soient u, v des endomorphismes de E. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On suppose que l'on a
$$u \circ v - v \circ u = au + bv.$$

1. On suppose pour commencer que $b = 0$ et $a \neq 0$.
• Montrer que l'endomorphisme u n'est pas inversible. (Indication : Trace)
• En déduire que les endomorphismes v et u ont un vecteur propre en commun.
• Déterminer $u^n \circ v - v \circ u^n$ pour tout $n \geq 1$.
• En étudiant l'application linéaire $\phi : w\mathcal{L}(E) \mapsto w \circ v - v \circ w \in \mathcal{L}(E)$, montrer que l'endomorphisme u est en fait nilpotent : il existe $k \geq 0$ tel que $u^k = 0$.

2. On suppose maintenant que $a, b \neq 0$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

---

1. On a $uv - vu = au$, avec un $a \in \mathbb{C}^*$.
• Si u était inversible, on aurait $u^{-1}uv - u^{-1}vu = au^{-1}u$, c'est-à-dire $v - u^{-1}vu = aId_E$.
En regardant la trace de ces endomorphismes, cela donnerait
$$a.\dim(E) = Tr(aId_E) = Tr(v - u^{-1}vu) = Tr(v) - Tr(u^{-1}vu) = Tr(v) - Tr(v) = 0,$$
ce qui est impossible. Donc l'endomorphisme u n'est pas inversible.
• Comme u n'est pas inversible, le sous-espace $\mathrm{Ker}\,(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (0 est une valeur propre de u).
Pour $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$, on a $uv(x) - vu(x) = au(x) = 0$, d'où $u(v(x)) = 0 + v(u(x)) = 0$.
Ainsi, on a $v(x) \in \mathrm{Ker}\,(u)$. Le sous-ev $\mathrm{Ker}\,(u)$ est stable par v.
Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, l'endomorphisme induit $v_{\mathrm{Ker}(u)}$ possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique est scindé).
Ainsi, pour $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$ un vecteur propre de $v_{\mathrm{Ker}(u)}$, x est un vecteur propre de u et un vecteur propre de v. Ces deux endomorphismes ont donc bien un vecteur propre en commun. • On a $uv - vu = au$.
Cela donne
$$u^2v - vu^2 = u^2v - uvu + uvu - vu^2 = u(uv - vu) + (uv - vu)u = au^2 + au^2 = 2au^2.$$
On montre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que $u^nv - vu^n = anu^n$.
Cela est vrai pour $n = 1$, et si cela est vrai pour un $n \geq 1$, alors on a
$$u^{n+1}v - vu^{n+1} = u^{n+1}v - u^nvu + u^nvu - vu^{n+1}$$
$$= u^n(uv - vu) + (u^nv - vu^n)u = u^n(au) + (anu^n)u = a(n+1)u^{n+1}.$$
Cela démontre la récurrence.
• Pour $\phi : w \mapsto wv - vw$, ϕ est un endomorphisme sur $\mathcal{L}(E)$, espace vectoriel de dimension $\dim(E)^2$.
On a $\phi(u) = au$. Si u est non-nul, on obtient donc qe u est un vecteur propre de ϕ pour la valeur propre a.
D'après le résultat précédent, on a $\phi(u^n) = nau^n$ pour tout $n \geq 1$.
Comme $a \neq 0$, les nombres na sont tous distincts.
Mais ϕ ne peut pas avoir plus de $\dim(E)^2$ valeurs propres distinctes. Ainsi, il existe au moins un entier n tel que $u^n = 0$.
L'endomorphisme u est bien nilpotent.
2. On pose $w = au + bv$. On a
$$wv - vw = (au + bv)v - v(au + bv) = auv - avu = a(uv - vu) = a(au + bv) = aw.$$
On peut alors se ramener au cas précédent, et le résultat de la question précédente nous dit que v et $w = au + bv$ ont un vecteur propre en commun.
Comme $a \neq 0$, on en déduit que v et $u = \frac{w - bv}{a}$ ont un vecteur propre en commun.