Feuille de TD n° 5

Polynôme caractéristique, sous-espaces stables

14 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mathrm{Spec}\,(A)$, χ_A, et les sous-espaces $E_\lambda(A)$.
Trouver un vecteur $X \in \mathbb{K}^2$ tel que $S_u(X) = \mathbb{K}^2$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.

- Déterminer $\chi_A(X)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A, déterminer $E_\lambda(A)$.
- Trouver des vecteurs X tels que $\dim(S_A(X)) = 2$ et 4.

Exercice 3. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.

- La matrice B possède-t-elle des sous-espaces stables de dimension 3 ?

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient f, p deux endomorphismes de E, avec p une projection.
Montrer que l'on a $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $Im(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont stables par f.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non-nulle telle que $Im(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires.

1. Montrer que la matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A' \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace "$Im(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires" par "$rg(A) = rg(A^2)$" ?

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme tel que $f^2 = -Id_E$.

1. Soit $x \in E$ non-nul. Montrer que $S_f(x)$ et est de dimension 2.
2. Soit F un sous-ev de E stable par f.
   Montrer que l'on a soit $S_f(x) \subset F$, soit $S_f(x) \oplus F$.
3. Montrer par récurrence qu'il existe un entier r et des vecteurs $x_1, \dots, x_r \in E$ tels que
   $$E = S_f(x_1) \oplus S_f(x_2) \oplus \dots \oplus S_f(x_r).$$
4. En déduire que E est de dimension paire, et qu'il existe une base B de E dans laquelle $\mathrm{Mat}(f, B)$ est diagonale par blocs.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et non-nulle. Soient u, v des endomorphismes de E. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On suppose que l'on a

$$u \circ v - v \circ u = au + bv.$$

1. On suppose pour commencer que $b = 0$ et $a \neq 0$.
   - Montrer que l'endomorphisme u n'est pas inversible. (Indication : Trace)
   - En déduire que les endomorphismes v et u ont un vecteur propre en commun.
   - Déterminer $u^n \circ v - v \circ u^n$ pour tout $n \geq 1$.
   - En étudiant l'application linéaire $\phi : w\mathcal{L}(E) \mapsto w \circ v - v \circ w \in \mathcal{L}(E)$, montrer que l'endomorphisme u est en fait nilpotent : il existe $k \geq 0$ tel que $u^k = 0$.

2. On suppose maintenant que $a, b \neq 0$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.