Feuille de TD n° 6

Diagonalisabilité, Diagonalisation

20 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soient $A \in \mathrm{GL}(n)\mathbb{K}$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable.
Montrer que BA est diagonalisable.

Comme A est inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$, donc BA et AB sont semblables.
Ainsi, en utilisant des invariants de similitude, on trouve que $\mathrm{Spec}\,(BA) = \mathrm{Spec}\,(AB) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, et que $\dim(E_{\lambda_i}(BA)) = \dim(E_{\lambda_i}(AB))$.
On en déduit donc que :

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(BA) = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(AB) = n,$$

Donc la matrice BA est diagonalisable.
Autre preuve : Comme AB est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}ABP = D$.
On a alors :

$$P^{-1}A(BA)A^{-1}P = (PA^{-1})^{-1}(BA)(PA^{-1}) = P^{-1}ABP = D,$$

donc la matrice BA est semblable à une matrice diagonale.

Ainsi, la matrice BA est diagonalisable.

Exercice 2. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. On a $Tr(A) = 0$. On remarque un vecteur propre facile : pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a $Au = u$.

   On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$. Avec le vecteur propre u, on commence par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_3$ afin de factoriser $(X + 1)$ dans le calcul du déterminant.
   On obtient $\chi_A(X) = (X - 1)(X^2 + X - 12)$.
   Après factorisation, cela donne $\chi_A(X) = (X - 1)(X + 4)(X - 3)$.
   Le spectre de A est donc $\{-4, 1, 3\}$. La dimension de chaque sous-espace propre de A vaut donc 1, et son polynôme caractéristique est scindé. Donc, A est diagonalisable.
   En résolvant les équations $AX = 3X$ et $AX = -4X$, on trouve que $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A, pour les valeurs propres 3 et -4.
   Ces vecteurs propres étant associés à des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est donc une base de $\mathbb{K}^3$.
   Ainsi, pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w), c'est-à-dire

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

   on a $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}\,(1, 3, -4)$.
2. On a $\chi_B(X) = (X-1)^3$. La matrice B est diagonalisable si et seulement si $\dim(Ker(B - I_3)) = 3$. Or, on a $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2, donc $\dim(Ker(B - I_3)) = 1$.
   Cette matrice n'est pas diagonalisable
3. On a $\chi_C(X) = (X - 1)(X - 2)^2$. Le spectre de C est $\{1, 2\}$ et $\dim(E_1(C)) = 1$.
   La matrice C est diagonalisable si et seulement si $\dim(Ker(C - 2I_3)) = 2$.
   Or, on a $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1, donc $\dim(Ker(C - 2I_3)) = 2$.
   Cette matrice est bien diagonalisable.
   On remarque que l'on a $Ce_1 = e_1$, $Ce_2 = 2e_2 + 5e_1$, $Ce_3 = 2e_3 - 3e_1$.
   On a donc $E_1(C) = Vect(e_1)$.
   On trouve que deux vecteurs propres pour 2 sont $v = e_2 + 5e_1$ et $w = e_3 - 3e_1$.
   La famille (e_1, v, w) forme une base de $\mathbb{K}^3$.
   Pour P la matrice de passage de la base canonique vers (e_1, v, w), on a $P^{-1}CP = \mathrm{Diag}\,(1, 2, 2)$.
4. La matrice D est de rang 1. Donc, $\dim(Ker(D)) = n - 1$. Ainsi, on a $X^{n-1} \mid \chi_D(X)$.
   Cela donne $\chi_D(X) = X^n - Tr(D)X^{n-1} = X^n - nX^{n-1} = X^{n-1}(X - n)$.

Le spectre de D est donc $\{0, n\}$. On a de plus $\dim(E_n(D)) = 1$.
On a obtenu que $\dim(E_0(D)) = n - 1$.
Ainsi, la matrice D est diagonalisable.
On trouve facilement des vecteurs propres pour ces deux sous-espaces propres :
Pour $u = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, on a $Du = n.u$.
Pour $v_2 = e_2 - e_1$, $v_3 = e_3 - e_2$, …, $v_n = e_n - e_{n-1}$, on a $Dv_k = 0$.
La famille $(v_2, \ldots, v_n)$ est libre, c'est donc une base de $E_0(D)$.
Ainsi, la famille $(u, v_2, \ldots, v_n)$ est une base formée de vecteurs propres de D.
Pour P la matrice de passage de la base canonique vers $(u, v_2, \ldots, v_n)$, on obtient :

$$P^{-1}DP = \mathrm{Diag}\,(n, 0, \ldots, 0)\,.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable.

Soit $\mathrm{Spec}\,(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ On a $\Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_A(\lambda_i)} = \chi_A(X) = \chi_{{}^tA}(X)$, donc on connait le polynôme caractéristique de ${}^tA$ et le spectre de ${}^tA$.
Soit $1 \leq i \leq r$. Montrons que $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = \dim(E_{\lambda_i}({}^tA))$.
On a ${}^tA - \lambda_i I_n = {}^tA - \lambda_i I_n$.
D'après des résultats des cours d'algèbre précédents sur la transposée, on a $rang({}^tA - \lambda_i I_n) = rang({}^tA - \lambda_i I_n) = rang(A - \lambda_i I_n)$.
Donc, avec le théorème du rang, on en déduit que $\dim(Ker({}^tA - \lambda_i I_n)) = \dim(Ker(A - \lambda_i I_n)) = \dim(E_{\lambda_i}(A))$.
Comme A est diagonalisable, on obtient ainsi :

$$\sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}({}^tA)) = \sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n,$$

donc ${}^tA$ est diagonalisable.

Autre preuve : A est diagonalisable donc A est semblable à une matrice diagonale D. Alors, ${}^tA$ est semblable à ${}^tD = D$. Donc, ${}^tA$ est diagonalisable car semblable à une matrice diagonale.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Trouver une matrice triangulaire supérieure B de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (où a et b sont deux réels que l'on déterminera) et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = B$.

---

1. On a $Tr(A) = 2$ et $\det(A) = 1$. Ainsi, $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
   Donc, $\mathrm{Spec}\,(A) = \{1\}$ et $m_A(1) = 2$.
   Si A était diagonalisable, alors on aurait une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}\,(1,1) = I_2$.
   Cela donnerait : $A = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.
   Comme $A \neq I_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Si on a $P^{-1}AP = B$, alors A est semblable à B. Donc A et B ont même polynôme caractéristique, même spectre, même multiplicité de valeurs propres, même dimension de sous-espaces propres.
   Comme B est une matrice triangulaire, ses coefficients diagonaux doivent ainsi être 1 et 1 : $a = b = 1$.
   Maintenant, déterminons la matrice P.
   On voit que e_1 est un vecteur propre de B. Donc, $P(e_1)$ est un vecteur propre de A.
   On cherche ainsi les vecteurs propres de A pour 1. On remarque que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. De plus, comme A n'est pas diagonalisable, on doit avoir $\dim(E_1(A)) = 1$, donc $E_1(A) = Vect(u)$.
   Cherchons un deuxième vecteur pour compléter la famille (u) en une base de $\mathbb{K}^2$.
   On voudrait avoir $A(v) = v + u$.
   Prenons $v_0 = e_1$. On a $A(v_0) = A(e_1) = -e_2 = e_1 - u = v_0 - u$. En posant alors $v = -v_0 = -e_1$, on a $A(v) = e_2 = -e_1 + (e_1 + e_2) = v + u$.
   Donc, pour $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v), on obtient :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une base formée de vecteurs propres de A.
2. Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.
3. (Bonus) Déterminer toutes les matrices B qui commutent avec A.

---

1. On a $Tr(A) = 0$.

   On remarque que la somme des colonnes $C_1 + C_2 + C_3$ vaut $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Cela indique que pour $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on a $Au = u$. Donc u est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.
   Un calcul de déterminant donne $\det(A) = -6$. On a donc : $\chi_A(X) = X^3+0+a.X+6 = (X-1)(X^2+bX+c)$.
   On obtient donc que $c = -6$ et $b = 1$, c'est-à-dire $\chi_A(X) = (X-1)(X^2+X-6)$.
   Les racines de X^2+X-6 sont -3 et 2, d'où $\chi_A(X) = (X-1)(X+3)(X-2)$.
   On a donc $\mathrm{Spec}\,(A) = \{-3, 1, 2\}$. On détermine v un vecteur propre de A pour la valeur propre -3, et w un vecteur propre de A pour la valeur propre 2.

   $$Av = -3v \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow v = (\frac{1}{11}z, \frac{7}{11}z, z)\,, z \in \mathbb{R}.$$

   Donc, $v = (1, 7, 11)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre -3.

   $$Aw = 2w \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow w = (z, 2z, z)\; z \in \mathbb{R}.$$

   Donc, $w = (1, 2, 1)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 2.
   Les vecteurs u, v, w étant des vecteurs propres de A pour des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   On a trouvé base fomée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable.

2. Soit B une matrice qui commute avec A. Alors B laisse stables les sous-espaces propres de A. Donc, B laisse stable les sous-espaces $E_1(A) = Vect(u)$, $E_2(A) = Vect(w)$ et $E_{-3}(A) = Vect(v)$.
   Ainsi, u, v, w sont des vecteurs propres de B.
   On a trouvé une base formée de vecteurs propres de B, donc B est diagonalisable.

3. La matrice A est diagonalisable. En prenant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w) formée de vecteurs propres, on obtient :

   $$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}\,(1, -3, 2) = D,\; A = PDP^{-1}$$

   Ainsi, on a $BA = AB$ si et seulement si $BPDP^{-1} = PDP^{-1}B$.
   C'est-à-dire, si et seulement si $P^{-1}BP.D = D.P^{-1}BP$.
   On se ramène à trouver toutes les matrices C telles que $CD = DC$.
   Posons $C = (c_{i,j})$ et $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
   Alors, les matrices CD et DC s'écrivent $CD = (c_{i,j}.\lambda_j)_{i,j}$ et $DC = (\lambda_i c_{i,j})_{i,j}$.
   Si $CD = DC$, on doit donc avoir $\lambda_i c_{i,j} = \lambda_j c_{i,j}$, pour tous i, j.
   Comme les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont deux à deux distincts, on en déduit que $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
   Ainsi, la matrice C est de la forme $C = \begin{pmatrix}c_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & c_{2,2} & 0\\ 0 & 0 & c_{3,3}\end{pmatrix}$.
   Réciproquement, une matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,(a, b, c)$ commute avec la matrice diagonale D.
   On a donc $CD = DC$ si et seulement si $C = \mathrm{Diag}\,(a, b, c)$, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$.
   Ainsi, on a $AB = BA$ si et seulement si $B = P\,\mathrm{Diag}\,(a, b, c)\,P^{-1}$, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$. On a alors :

   $$B = aP\,\mathrm{Diag}\,(1,0,0)\,P^{-1} + bP\,\mathrm{Diag}\,(0,1,0)\,P^{-1} + cP\,\mathrm{Diag}\,(0,0,1)\,P^{-1} = aM_1 + bM_2 + cM_3,$$

   L'ensemble des matrices B qui commutent avec A est donc $Vect(M_1, M_2, M_3)$, un sous-ev de dimension 3.

   Bonus : Soient L_1, L_2, L_3 les polynômes d'interpolation associés à $(1, -3, 2)$.
   On a alors $L_1(\mathrm{Diag}\,(1, -3, 2)) = \mathrm{Diag}\,(L_1(1), L_1(-3), L_1(2)) = \mathrm{Diag}\,(1, 0, 0)$.
   De même, on obtient que $L_2(D) = \mathrm{Diag}\,(0, 1, 0)$ et que $L_3(D) = \mathrm{Diag}\,(0, 0, 1)$.
   Les propriétés des polynômes d'endomorphismes donnent :

   $$M_1 = PL_1(D)P^{-1} = L_1(PDP^{-1}) = L_1(A).$$

   De même, on trouve que $M_2 = PL_2(D)P^{-1} = L_2(A)$, et que $M_3 = L_3(A)$. Ces matrices sont des polynômes en A.
   Un rapide calcul donne $L_1(X) = \frac{1}{-4}(X^2 + X - 6I_3)$, $L_2(X) = \frac{1}{20}(X^2 - 3X + 2I_3)$, $L_3(X) = \frac{1}{5}(X^2 + 2X - 3I_3)$.
   Donc, les matrices M_1, M_2, M_3 sont des combinaisons linéaires de I_3, A, A^2. On peut donc calculer ces matrices juste en calculant A^2 (pas besoin de connaître une base de vecteurs propres, ni la valeur de P^{-1}, ni de faire beaucoup de produits de matrices).

   Bonus 2 : L'ensemble $\mathbb{K}[A]$ est un sous-ev de matrice qui commutent avec A. Ce sous-ev est au moins de dimension 3 (A^2 n'est pas combinaison linéaire de I_3 et de A, sinon A aurait un polynôme annulateur de degré 2, et donc au plus deux valeurs propres distinctes).
   Ainsi, on en déduit que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est exactement $\mathbb{K}[A]$, et que $\dim(\mathbb{K}[A]) = 3$, c'est-à-dire $\mathbb{K}[A] = Vect(I_3, A, A^2)$.
   Ce résultat n'est pas vrai en général (par exemple, pour E une homothétie, toute matrice B commute avec E).

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a, b, c)$, où (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. Montrer qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (C'est la même matrice P pour tout (a, b, c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?

Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. $M(a, b, c) = a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K$, d'où $F = \mathrm{Vect}(I, J, K)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille (I, J, K) est une famille génératrice de F. Montrons que la famille (I, J, K) est aussi libre :

$$a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc (I, J, K) est une base de F.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$
$-\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}.$

D'où $\chi_J(X) = X(X^2 - 2)$. Le spectre de la matrice J est donc $\mathrm{Spec}\,(J) = \{0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
On remarque que l'on a

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}.$$

La résolution des équations $JX = \sqrt{2}X$ et $JX = -\sqrt{2}X$ nous donne deux autres vecteurs propres :

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, J \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}.$$

Les sous-espaces propres de la matrice J sont donc $\mathrm{Ker}(J - 0I) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$, $\mathrm{Ker}(J - \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}(\vec{v})$ et $\mathrm{Ker}(J + \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}(\vec{w})$. La matrice J est donc diagonalisable.

3. On trouve rapidement trois vecteurs propres de K :

$$K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \qquad K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}\,'}, \qquad K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}\,'}.$$

Le spectre de K est donc : $\mathrm{Spec}\,(K) = \{0, 2\}$, et ses sous-espaces propres sont $\mathrm{Ker}(K - 0I) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\mathrm{Ker}(K - 2I) = \mathrm{Vect}(\vec{v}\,', \vec{w}\,')$.

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) vers la base (u, v, w). On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Avec cette matrice P, on obtient :

$$P^{-1} \cdot J \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, les vecteurs v et w sont des vecteurs propres de K pour la valeur propre 2 : $v = v' + \sqrt{2}w'$ et $w = v' - \sqrt{2}w'$, donc $v, w \in \mathrm{Ker}(K - 2I) = Vect(v', w')$.

5. Pour cette matrice P, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale car

$$P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P = P^{-1} \cdot (aI + bJ + cK) \cdot P = a \cdot P^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP.$$

6. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} + 2c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + 2c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le spectre de la matrice $M(a, b, c)$ est donc $\{a, a + b\sqrt{2} + 2c, a - b\sqrt{2} + 2c\}$.

Remarque : On pouvait remarquer que $K = J^2$, donc les vecteurs propres de J sont des vecteurs propres de K.

Exercice 7. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M.

2. On suppose que $a = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi'_M(X)$ possèdent une racine commune. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

---

1. $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -a \\ -1 & X & 0 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - aX - a.$
2. Si $a = 0$ alors $\chi_M(X) = X^3$, d'où 0 est l'unique valeur propre de M. Si M est diagonalisable, alors il existe P telle que $P^{-1}MP = 0$. C'est absurde car $M \neq 0$. Donc M n'est pas diagonalisable.
3. Si $a = \dfrac{1}{2}$, alors $\chi_M(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X-1)(X^2 + X + \frac{1}{2})$. D'où $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1; -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right\}$. La matrice M possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc M est diagonalisable.
4. La dérivée du polynôme $\chi_M(X)$ est le polynôme $\chi'_M(X) = 3X^2 - a$. Si $a = \dfrac{27}{4}$, alors $-\dfrac{3}{2}$ est une racine de $\chi_M(X)$ et de $\chi'_M(X)$, d'où $-\dfrac{3}{2}$ est une racine double de $\chi_M(X)$. Le polynôme caractéristique possède donc deux racines : une racine simple égale à 3 et une racine double égale à $-\dfrac{3}{2}$. D'où $\dim E_3(M) = 1$ et $1 \leqslant \dim E_{-\frac{3}{2}}(M) \leqslant 2$. Donc M est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_{-\frac{3}{2}}(M) = 2$. Or
$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
D'où $\dim E_{-\frac{3}{2}}(M) = 1$. Donc M n'est pas diagonalisable.
5. Si le polynôme caractéristique $P_M(X)$ possède une racine z double, alors $P_M(z) = z^3 - az - a = 0$ et $P'_M(z) = 3z^2 - a = 0$. D'où $a = 0$ ou $z = -\frac{3}{2}$.
Si $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable (question 2).
Si $z = -\frac{3}{2}$, alors $a = \frac{27}{4}$, d'où M n'est pas diagonalisable (question 4).
Sinon, les racines du polynôme caractéristique sont simples, d'où il existe 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc M est diagonalisable.
Donc la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $a \in \mathbb{C} \setminus \left\{0; \frac{27}{4}\right\}$.