Feuille de TD n° 6

Diagonalisabilité, Diagonalisation

20 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soient $A \in \mathrm{GL}(n)\mathbb{K}$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable.
Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 2. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Trouver une matrice triangulaire supérieure B de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (où a et b sont deux réels que l'on déterminera) et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = B$.

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une base formée de vecteurs propres de A.
2. Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.
3. (Bonus) Déterminer toutes les matrices B qui commutent avec A.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a, b, c)$, où (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. Montrer qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (C'est la même matrice P pour tout (a, b, c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?

Exercice 7. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M.

2. On suppose que $a = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi'_M(X)$ possèdent une racine commune. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?