Feuille de TD n° 7

Polynômes d'endomorphismes

5 novembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Trouver $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(A) = 0$.

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,.$$

On pose $Q(X) = \pi_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.
Alors, on a $Q(\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \mathrm{Diag}\,(Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)) = 0$.
On obtient ainsi :

$$Q(A) = Q(P\,\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,P^{-1}) = PQ(\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))P^{-1} = 0,$$

ce qui conclut.

Note : On a montré que $\chi_A(A) = 0$. On démontrera ce résultat pour toute matrice carrée dans le cours (théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice 2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes qui sont premiers entre eux. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = Q(A) = 0$?

D'après le théorème de Bézout, comme $pgcd(P, Q) = 1$, il existe $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X).R(X) + Q(X).S(X) = 1$.
Si on avait $P(A) = Q(A) = 0$, on aurait alors

$$I_n = (R.P + S.Q)(A) = R(A).P(A) + S(A).Q(A) = 0 + 0 + 0,$$

ce qui est impossible.

Une telle matrice A n'existe pas.

Exercice 3. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.

Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(J_n(\lambda)) = 0$.
• Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $Q(J_n(\lambda))$ en fonction de $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$.

On pose $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$. N est une matrice avec des 1 juste au-dessus de la diagonale, et 0 ailleurs ($n_{i,i+1} = 1$, $n_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$).
Montrons que cette matrice est nilpotente, avec $N^n = 0$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $N(e_1) = 0$, $N(e_2) = e_1$, ..., $N(e_n) = e_{n-1}$.
En posant $x = e_n$, on a donc $N^k(x) = e_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n - 1$, et $N^n(x) = NN^{n-1}(x) = N(e_1) = 0$.
On en déduit donc que $N^n(e_i) = N^n(N^{n-i}(x)) = N^{n-i}.N^n(x) = 0$.
Pour tout $z \in \mathbb{K}^n$, z s'écrit $z = z_1e_1 + \ldots + z_ne_n$.
Cela donne : $N^n(z) = \sum_{i=1}^{n} z_iN^n(e_i) = 0$.
On a bien montré que $N^n = 0$, c'est-à-dire que $(J_n(\lambda) - \lambda I_n)^n = 0$.
En posant $P(X) = (X - \lambda)^n$, on obtient le résultat.

Note : Le polynôme P est exactement $\chi_{J_n(\lambda)}$. On a montré dans ce cas particulier que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. Le cas général sera vu en cours.

• Soit $m = \deg(Q)$. En utilisant la formule de Taylon en λ, on a

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X - \lambda)^k,$$

donc

$$P(J_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}N^k.$$

Le calcul de la question précédente permet de déterminer les puissances de N, qui ont une expression simple.
On en conclut que

$$P(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & P'(\lambda) & \frac{P''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{P^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{P''(\lambda)}{2!} \\ & & & \ddots & P'(\lambda) \\ (0) & & & & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $A_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de permutation associée à σ : $A_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$.
On écrit $\sigma = c_1 \cdot \ldots c_r$ la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint.
Trouver deux polynômes P tels que $P(A_\sigma) = 0$.
Que peut-on dire sur le spectre de A_σ ?

On sait que $A_\sigma.A_\tau = A_{\sigma\tau}$ (démonstration facile en utilisant les coefficients).
• Le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ est de cardinal $n!$.
D'après le théorème de Lagrange, on a donc $\sigma^{n!} = Id$. Ainsi, pour $P(X) = X^{n!} - 1$, on a $P(A_\sigma) = 0$.
Note : Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2, on sait qu'il existe des polynômes annulateurs de A de degré inférieur à n^2, donc ce polynôme P n'est pas optimal du tout.
• Notons k_i la longueur du cycle c_i. On sait alors que $c_i^{k_i} = Id$. On pose $k = ppcm(k_1, \ldots, k_r)$.
Alors, on a $\sigma^k = c_1^{k_1} \ldots c_r^{k_r} = Id$, car les cycles c_i sont à support disjoint.
Ainsi, pour $Q(X) = X^k - 1$, on a $Q(A) = 0$.
Note : Ce polynôme Q est bien de degré $\leq n^2$, car $r \leq n$ et car $k_i \leq n$. Par contre, il n'est pas toujours optimal (au sens du plus petit polynôme annulateur). On montrera dans le cours qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a un polynôme annulateur de degré $\leq n$, et on n'a pas toujours $\deg(Q) \leq n$ (par exemple $n = 5$, $r = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$).
• Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A_\sigma)$. On a alors $x \in \mathbb{K}^n$ non-nul tel que $A_\sigma(x) = \lambda x$.
On obtient ainsi que $0 = Q(A)(x) = Q(\lambda)x$, d'où $Q(\lambda) = 0$.
Donc, le spectre de A_σ est inclus dans l'ensemble des racines k-èmes de l'unité (et donc inclus dans l'ensemble des racines $n!$-èmes de l'unité).

Note : Avec un polynôme annulateur, on a des informations sur le spectre sans utiliser le polynôme caractéristique.

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

On a $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m$, avec $a_0 = P(0) \neq 0$.
La relation $P(A) = 0$ donne : $a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$
$\Leftrightarrow A(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1) = -a_0 I_n$
$\Leftrightarrow A(\frac{-1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1)) = I_n$
La matrice $B = \frac{-1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1)$ est un polynôme en A, donc elle commute avec A.
On en déduit donc que $AB = BA = I_n$, donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \ldots + a_1)$.

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que l'on a u nilpotent si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$.
2. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$.
   Montrer que u est nilpotent.
3. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$. Montrer que $\chi_u(u) = u^n = 0$.

---

1. Soit $k \geq 0$ tel que $u^k = 0$. Alors, pour tout $x \in E$, on a $u^k(x) = 0$.
   Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^{k_i}(e_i) = 0$.
   On pose $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$.
   Alors, on a $u^k(e_i) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
   Soit $x \in E$. On a $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Ainsi, on a $u^k(x) = \sum_{i=1}^n x_i u^k(e_i) = 0$.
   Donc, on a $u^k = 0$. L'endomorphisme u est bien nilpotent.
2. Soit $x \in E$. On va montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$.
   D'après les propriétés des sous-espaces cycliques, $S_u(x)$ est de dimension $r+1$ et a pour base $(x, u(x), \ldots, u^r(x))$.
   Pour $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$ tels que $u^{r+1}(x) = -a_r u^r(x) - \ldots - a_1 u(x) - a_0 x$, on a alors :
   $$\chi_{u_{S_u(x)}} = X^{r+1} + a_r X^r + \ldots + a_1 X + a_0.$$
   Or, on sait aussi que $\chi_{u_{S_u(x)}}$ divise χ_u. Comme on a $\chi_u(X) = X^n$, on en déduit que $\chi_{u_{S_u(x)}} = X^{r+1}$.
   Ainsi, on a $u^{r+1}(x) = 0$.
   Donc, pour tout $x \in E$ il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$. Cela veut dire que u est nilpotent.
3. D'après la question précédente, on sait que u est nilpotent.
   Reprenons les idées des deux premières questions.
   Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
   Soit d_i la dimension du sous-espace cyclique $S_u(e_i)$. Alors, on a $u^{d_i}(e_i) = 0$ d'après la preuve de la question (2).
   En prenant $d = \max(d_1, \ldots, d_n)$, on a donc d'une part que $u^d = 0$, et d'autre part que $d \leq n$ car $d_i \leq n$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
   On en déduit donc que $\chi_u(u) = u^n = u^d.u^{n-d} = 0$.

   Note : On reverra ce résultat en cours (le théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice 7. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p.

1. Montrer que $I_n - B$ est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.

3. On pose

$$H = \{I_n + P(B) / P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$

Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$

---

1. Comme B et I_n commutent, la formule de somme géométrique donne :

$$I_n = I_n - B^p = (I_n - B)\left(I_n + B + B^2 + \cdots + B^{p-1}\right),$$

donc $I_n - B$ est inversible d'inverse $I_n + B + B^2 + \cdots + B^{p-1}$.

2. Posons $N = -A^{-1}BA$. On a $N^p = (-1)^p A^{-1} B^p A = O_n$, donc N est aussi nilpotente d'indice p.
On en déduit que $I_n - N = I_n + A^{-1}BA$ est inversible d'inverse $I + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$.

3. — Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On a $P(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_m X^m$. Ainsi, $P(B) = B(a_1 I_n + a_2 B + \ldots + a_m B^{m-1})$. Ainsi, on a

$$P(B)^p = a_1^p B^p (a_1 I_n + a_2 B + \ldots + a_m B^{m-1})^p = O_n.$$

Comme cette matrice est encore nilpotente, on peut reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $I_n + P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme

$$I - P(B) + P(B)^2 + \cdots + (-1)^{p-1} P(B)^{p-1}.$$

Notons $Q = -P + P^2 + \cdots (-1)^{p-1} P^{p-1}$.
On trouve que $Q(0) = -P(0) + P(0)^2 + \cdots (-1)^{p-1} P(0)^{p-1} = 0$, donc

$$(I_n + P(B))^{-1} = I_n + Q(B) \in H.$$

On en déduit que H est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H.

— On vérifie facilement que H est non vide, et que $(I_n + P(B))(I_n + R(B)) = I_n + (P + R + PR)(B)$, avec $(P + R + PR)(0) = 0$. Ainsi, H est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

— Enfin, H est inclus dans $\mathbb{K}[B]$, donc tous les éléments de H commutent entre eux.