FEUILLE DE TD N° 7

Polynômes d'endomorphismes

5 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Trouver $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(A) = 0$.

Exercice 2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes qui sont premiers entre eux. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = Q(A) = 0$?

Exercice 3. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.

Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(J_n(\lambda)) = 0$.
• Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $Q(J_n(\lambda))$ en fonction de $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$.

Exercice 4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $A_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de permutation associée à σ : $A_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$.
On écrit $\sigma = c_1 \cdot \ldots c_r$ la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint.
Trouver deux polynômes P tels que $P(A_\sigma) = 0$.
Que peut-on dire sur le spectre de A_σ ?

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que l'on a u nilpotent si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) = 0$.
2. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$.
   Montrer que u est nilpotent.
3. On suppose que $\chi_u(X) = X^n$. Montrer que $\chi_u(u) = u^n = 0$.

Exercice 7. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p.

1. Montrer que $I_n - B$ est inversible et exprimer son inverse.
2. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
3. On pose
   $$H = \{I_n + P(B) / P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$
   Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$