FEUILLE DE TD N^{o} 8

Polynômes d'endomorphismes

16 novembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Soit E un ev de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E.
On pose $F_i = S_u(v_i)$ et $P_i(X) = \mu_{u_{F_i}}(X)$.
• Montrer que l'on a $\mu_u = ppcm(P_1, \ldots, P_n)$.
• Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose A_σ la matrice de permutation associée à σ.
On écrit $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_r$ la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.
Déterminer μ_{A_σ}.
Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce polynôme est à racines simples.

---

1. Soit $P = ppcm(P_1, \ldots, P_n)$.
   Par définition de P_i, on a $P_i(u)(e_i) = 0$. Comme P_i divise P, on a aussi $P(u)(e_i) = 0$.
   Soit $x \in E$. On a $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.
   Par linéarité de $P(u)$, on a :
   $$P(u)(x) = x_1P(u)(e_1) + \ldots + x_nP(u)(e_n) = 0.$$
   Ainsi, P est un polynôme annulateur de u, donc $\mu_u \mid P$.
   Réciproquement, comme F_i est un sous-espace stable par u, on a $P_i = \mu_{u_{F_i}}$ qui divise μ_u.
   Ainsi, $ppcm(P_1, \ldots, P_n)$ divise μ_u.
   Comme ces deux polynômes sont unitaires, on en déduit que $\mu_u = P$.
2. Pour $1 \leq i \leq r$, on note l_i la longueur du cycle c_i.
   On écrit alors $c_i = (m_{i,1}, \ldots, m_{i,l_i})$.
   On note J_i le support du cycle c_i, c'est-à-dire $J_i = \{m_{i,1}, \ldots, m_{i,l_i}\}$.
   On note $m_1, \ldots, m_s$ les points fixes de la permutation σ, et on pose $J_0 = \{m_1, \ldots, m_s\}$.
   On a $s = n - (l_1 + \ldots + l_r)$.
   Soit $1 \leq j \leq n$. On a $0 \leq i \leq n$ tel que $j \in J_i$.
   • Si $j \in J_0$, on a $A_\sigma(e_j) = e_j$, donc le sous-espace cyclique $S_{A_\sigma}(e_j)$ est $Vect(e_j)$, et le polynôme minimal de l'endomorphisme induit est $X - 1$.
   • Si $i \neq 0$, on a $A_\sigma(e_j) = e_{c_i(j)}$. Comme c_i est un cycle de longueur l_i, le sous-espace cyclique $S_{A_\sigma}(e_j)$ est $Vect(e_k,\ k \in J_i)$.
   Ce sous-ev est de dimension l_i, et le polynôme minimal de l'endomorphisme induit sur ce sous-espace est $X^{l_i} - 1$.
   La première partie de l'exercice nous permet de trouver l'expression de μ_{A_σ} :
   $$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(P_1, \ldots, P_n),$$
   où $P_j(X) = (X - 1)$ si $j \in J_0$ et $P_j(X) = X^{l_i} - 1$ si $j \in J_i$, $i \neq 0$.
   Comme $ppcm(P, Q, Q) = ppcm(P, Q)$, cette expression se simplifie.
   Si σ possède un point fixe ($J_0 \neq \emptyset$) on a
   $$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(X - 1, X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1).$$
   Si σ ne possède pas de point fixe ($J_0 = \emptyset$) on a
   $$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1) = ppcm(X - 1, X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1).$$
   En effet, le polynôme $X^{l_1} - 1$ est un multiple de $X - 1$. Donc, pour toute permutation σ, on obtient :
   $$\mu_{A_\sigma}(X) = ppcm(X - 1, X^{l_1} - 1, \ldots, X^{l_r} - 1).$$
   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynômes $X^k - 1$ sont à racines simples (ils sont premiers avec leur polynôme dérivé kX^{k-1}). Or, le ppcm de deux polynômes à racines simples est un polynôme à racines simples.
   Donc, μ_{A_σ} est un polynôme à racines simples.
   Si l'on pose $E = \{z \in \mathbb{U} \text{ tels que } z^k = 1 \text{ pour un } k \in \{1, l_1, \ldots, l_r\}\}$, on a aussi $\mu_{A_\sigma}(X) = \Pi_{z \in E}(X - z)$.

Exercice 2. 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer μ_A.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice B est-elle diagonalisable ?
   Déterminer μ_B. (Indication : Poser $C = B - I$)

---

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A.
   Comme A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.
   La matrice D est de la forme $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, où λ_i apparaît $\mu_A(\lambda_i)$

fois.
Alors, le polynôme minimal de D est $\mu_D(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.
Comme le polynôme minimal est un invariant de similitude, on a $\mu_A = \mu_D = \Pi_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)}(X - \lambda)$.

2. La matrice B est diagonalisable si et seulement si la matrice $C = B - I$ est diagonalisable.
La matrice C est de rang 2, avec seulement deux colonnes non-nulles et non colinéaires.
Ainsi, on a $\chi_C(X) = X^n + aX^{n-1} + bX^{n-2}$.
On a $Tr(C) = 0$, donc $a = 0$.
On remarque que $X = e_1 - e_n$ est un vecteur propre de C, avec $CX = e_n - e_1 = -X$.
Comme $\chi_C(X) = X^{n-2}(X^2 + b)$, les valeurs propres non-nulles de C sont opposées.
Ces valeurs propres sont donc 1 et -1, d'où $\chi_C(X) = X^{n-2}(X-1)(X+1)$.
Si $n = 2$, on a $\chi_C(X) = (X-1)(X+1)$, donc C est diagonalisable (de valeurs propres 1 et -1) et B est diagonalisable.
Pour $n > 2$, les valeurs propres de C sont $0, 1, -1$.
Pour chaque valeur propre $(0, 1, -1)$, on a $\dim(E_\lambda(C)) = m_C(\lambda)$, donc la matrice C est diagonalisable.
Ainsi, en revenant à $B = C + I$, la matrice B est diagonalisable, de valeurs propres $0, 1, 2$.
On obtient ainsi que $\mu_B(X) = X(X-1)(X-2)$.
Autre méthode : En calculant C^2, C^3, on remarque que $C^3 = C$. Ainsi, $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de C. Le polynôme minimal de C, μ_C divise $X^3 - X$, donc le spectre de C est inclus dans $\{0, 1, -1\}$. On peut ensuite chercher la dimension des sous-espaces propres ($\dim(E_0(C) = n-2$ car C est de rang $n-2$,...), pour trouver que C est diagonalisable, et que B est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer μ_A.
Montrer que pour toute suite récurrente $(X_n)_n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie $X_{n+1} = AX_n$, la suite $(X_n)_n$ est bornée.

• Le calcul de χ_A donne $\chi_A(X) = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)(X-i)(X+i) = (X-1)(X^2+1)$.
D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $\mu_A \mid \chi_A$, donc μ_A est un diviseur de $(X-1)(X-i)(X+i)$.
La matrice A est ainsi diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, elle est semblable à la matrice $\mathrm{Diag}\,(1, i, -i)$. Le polynôme minimal de cette matrice diagonale est $(X-1)(X-i)(X+i)$.
Donc le polynôme minimal de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est $\mu_A = \chi_A$.
Maintenant, comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme réel annulateur de A est un polynôme complexe annulateur de A. Vu que χ_A est à coefficients réels, on en déduit que $(X-1)(X^2+1)$ est le polynôme minimal de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

• Comme les valeurs propres de A sont $1, i, -i$ et comme A est de taille $3x3$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, et donc $A^4 = I_3$.
La suite récurrente $(X_n)_n$ est donc périodique de période 4, peu importe le choix de X_0.
Cette suite est donc bornée.

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mu_{J_n(\lambda)}$.

On a vu dans le TD 7 que la matrice $J_n(\lambda)$ est annulée par $(X-\lambda)^n$, ce que l'on retrouve avec le théorème de Cayley-Hamilton.
Cela veut dire que pour $N = J_n(\lambda) - \lambda I_n$, la matrice N est nilpotente.
Or, on a $N(e_n) = e_{n-1}$, $N(e_{n-1}) = e_{n-2}$, ..., $N(e_2) = e_1$ et $N(e_1) = 0$.
On en déduit donc que pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $N^k(e_n) = e_{n-k}$. En particulier, on a $N^{n-1}(e_n) = e_1$, donc $N^{n-1} \neq 0$.
Etant donné que $N^n = 0$ et $N^{n-1} \neq 0$, on en déduit que $\mu_N(X) = X^n$.
Comme $J_n(\lambda) = N + \lambda I_n$, on obtient ainsi que $\mu_{J_n(\lambda)} = (X-\lambda)^n$.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ avec $u(P)(X) = P(X+1)$.
• Déterminer μ_u. (On pourra étudier $v = u - Id$).
• On se place maintenant sur $(\mathbb{Z}/2Z)_5[X]$, avec $v(P(X)) = P(X+1)$.
Déterminer μ_v.

---

1. Pour tout polynôme P, on a $\deg(u(P)) = \deg(P)$.
Cela implique que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
De plus, comme $u(X^k) = (X+1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$, le coefficient dominant de $u(P) = P(X+1)$ est égal au coefficient dominane de $P(X)$. Cette matrice a donc des 1 sur sa diagonale.
Son polynôme caractéristique vaut $(X-1)^{n+1}$, et le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\mu_u(X) \mid (X-1)^{n+1}$, c'est-à-dire $(u - Id)^{n+1} = 0$.
Cela veut dire que l'endomorphisme $u - Id$ est nilpotent. On cherche à calculer son indice de nilpotence.
Prenons $P(X) = aX^m$.
Si P est constant, on a $u(P) = P$ donc $u(P) - P = 0$.

Sinon, on a $m \geq 1$ et $u(P) - P = P(X+1) - P(X) = amX^{m-1} + ...$, polynôme de degré $m-1$.
Ainsi, pour $1 \leq k \leq n$, le polynôme $(u - Id)^k(X^n)$ est de degré $n-k \geq 0$, et de coefficient dominant $n(n-1)\dots(n-k+1)$. Ce polynôme est non-nul, donc l'endomorphisme $(u-Id)^k$ n'est pas l'endomorphisme nul.
Le plus petit entier k tel que $(u - Id)^k = 0$ est donc $k = n+1$.
On a donc $u - Id$ nilpotent d'indice $n+1$, donc $\mu_u(X) = (X-1)^{n+1}$.

2. Dans le corps $\mathbb{Z}/2Z$, on a $1+1=0$.
Cela implique par exemple que $X^2 - (X+1)^2 = -2X^-1 = -1$, ce qui va changer le résultat de certains calculs.
On trouve à nouveau que v a pour polynôme caractéristique $(X-1)^{n+1} = (X-1)^6$ et que donc $(v - Id)^6 = 0$.
La matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^5)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $1-1=0$, $(X+1)-X = 1$, $(X+1)^2 - X^2 = 1$, $(X+1)^3 - X^3 = X^2+X+1$, $(X+1)^4 - X^4 = 1$, $(X+1)^5 - X^5 = X^4 + X + 1$.
Ainsi, on a $(v - Id)(1) = 0$, $(v-Id)^2(X) = (v-Id)^2(X^2) = (v-Id)^2(X^4) = 0$, $(v-Id)^2(X^3) = 1+1+0 = 0$, $(v-Id)^2(X^5) = 1+1+0 = 0$.
Donc, on a $(v-Id)^2 = 0$ et $(v - Id) \neq 0$.
On en déduit que $\mu_v(X) = (X-1)^2$.

Autre méthode : En posant $Q_0(X) = 1$, $Q_1(X) = X$, $Q_2(X) = X(X-1)$, $Q_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1)$, pour $k \geq 1$, la famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
On remarque que l'on a $Q_1(X+1) - Q_1(X) = 1-1 = 0$, et pour $k \geq 1$,

$$Q_k(X+1) - Q_k(X) = (X+1)X(X-1)\dots(X-k+2) - X(X+1)\dots(X-k+1) = X\dots(X-k+2)(X+1-(X-k+1)) = kX\dots(X-k+2) = kQ_{k-1}(X).$$

On a donc : $(u - Id)(Q_0) = 0$ et $(u - Id)(Q_k) = kQ_{k-1}$, pour tout $k \geq 1$.
Pour $K = \mathbb{R}$, on retrouve le fait que $u - Id$ est nilpotent d'ordre n.
Maintenant, soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p (p un nombre premier, par exemple $\mathbb{Z}/pZ$). On remarque alors que $(u-Id)Q_k = k.Q_{k-1}$ est le polynôme nul si k est un multiple de p, et que kQ_{k-1} n'est pas nul sinon (polynôme de degré $k-1$, de coefficient dominant k).
En prenant $p=2$ et $n=5$, cela permet d'obtenir facilement le polynôme minimal de $u - Id$. On remarque que pour tout polynôme Q_k on a $(u-Id)^2(Q_k) = 0$. De plus, $(u - Id)(Q_3) = 3Q_2 \neq 0$. Donc, on a $\mu_{u-Id}(X) = X^2$, donc $\mu_u = (X-1)^2$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6. 1. Soit $M = \operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_r)$ une matrice diagonale par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
Déterminer $\mu_M(X)$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{K})$.
Montrer que l'on a $ppcm(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_M$ et $\mu_M \mid \chi_A\chi_B$.
Puis, montrer que l'on a $\mu_M \mid \mu_A\mu_B$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \vdots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
Montrer que l'on a $\mu_M \mid \Pi_{i=1}^r \mu_{A_i}$.
Ces deux polynômes sont-ils toujours égaux / toujours distincts ?

---

1. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(M) = \operatorname{Diag}(()\, P(A_1), \dots, P(A_r))$. Ainsi, si $P(M) = 0$ on a $P(A_1) = 0, \dots, P(A_r) = 0$.
Donc, pour tout i, on a $\mu_{A_i} \mid \mu_M$. Cela implique que $ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r}) \mid \mu_M$.
Réciproquement, montrons que $ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$ est un polynôme annulateur de M.
Le polynôme $P = ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$ est un multiple de $\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r}$. On a donc $P(A_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Cela donne donc $P(M) = 0$.
Comme P est un polynôme annulateur de M, on a $\mu_M \mid P$.
D'où, $\mu_M = ppcm(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$.

2. D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $\mu_M \mid \chi_M$. Pour une matrice triangulaire par blocs, on a $\chi_M = \chi_A\chi_B$. Donc $\mu_M \mid \chi_A\chi_B$.
Pour P un polynôme, on a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$, donc un polynôme annulateur de M est un polynôme annulateur de A et de B.
On obtient à nouveau que $\mu_A \mid \mu_M$ et $\mu_B \mid \mu_M$, c'est-à-dire $ppcm(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_M$.
Posons maintenant $P = \mu_A\mu_B$.
La matrice $P(M)$ est de la forme $P(M) = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut montrer que ce bloc $(*)$ est nul.
Les matrices $\mu_A(M)$ et $\mu_B(M)$ sont triangulaires supérieures par blocs, de la forme : $\mu_A(M) = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & \mu_A(B) \end{pmatrix}$ et $\mu_B(M) = \begin{pmatrix} \mu_B(A) & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On obtient donc :

$$P(M) = (\mu_A\mu_B)(M) = \mu_A(M)\mu_B(M) = \begin{pmatrix} 0.\mu_B(A) + A_1.0 & 0.B_1 + A_1.0 \\ 0.\mu_B(A) + \mu_A(B).0 & 0.B_1 + \mu_A(B).0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on $P(M) = 0$, ce qui implique que μ_M divse $\mu_A\mu_B$.

3. On démontre par récurrence sur $r \geq 2$ le résultat.
Pour $r = 2$, nous venons de le démontrer.

Soit $r \geq 2$. On suppose que le résultat est vrai pour r.

Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \vdots & \\ (0) & & A_{r+1} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs, avec $r+1$ blocs diagonaux.

Alors, on a $M = \begin{pmatrix} A' & (*) \\ 0 & A_{r+1} \end{pmatrix}$, où A' est une matrice carrée de taille $n_1 + \ldots + n_r$.

D'après la question précédente, on a $\mu_M \mid \mu_{A'}\mu_{A_{r+1}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\mu_{A'} \mid \mu_{A_1} \cdots \mu_{A_r}$.

On obtient ainsi $\mu_M \mid \Pi_{i=1}^{r+1}\mu_{A_i}$, ce qui termine la récurrence.

• Pour $M = \text{Diag}\,(A_1, \ldots, A_r)$ une matrice diagonale, on a $\mu_M = ppcm(\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_r})$.

Si les polynômes minimaux μ_{A_i} ne sont pas premiers entre eux deux à deux, ce *ppcm* est différent de $\Pi_{i=1}^{r}\mu_{A_i}$.

Pour M une matrice triangulaire avec une rangée de 1 au-dessus de la diagonale et 0 partout ailleurs ($M(e_1) = 0$, $M(e_i) = e_{i-1}$), la matrice M est triangulaire supérieure.

Les matrices $A_i = (0)$ sont des blocs diagonaux de M, avec $\mu_{A_i}(X) = X$.

La matrice M est nilpotente, et son polynôme minimal est $\mu_M(X) = X^n = \Pi_{i=1}^{r}\mu_{A_i}$.

Dans cette relation de divisibilité on peut donc avoir l'égalité, mais pas toujours.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Montrer que v est un polynôme en u.
Déterminer la dimension de $Com(u) = \{w \in \mathcal{L}(E) \text{ tels que } wu = uw\}$.

• On va montrer que comme v commute avec u ($uv = vu$), l'endomorphisme v est entièrement déterminé par le choix du vecteur $v(x)$.

Pour cela, on écrit $v(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$ la décomposition de $v(x)$ dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$. On va montrer que $v = P(u)$ avec $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$.

On a $v(x) = P(u)(x)$.

Comme u et v commutent, on a $v(u(x)) = u(v(x))$. Donc $v(u(x)) = u(P(u))(x) = P(u)(u(x))$.

Comme u et v commutent, v commute avec les puissances de u. On a ainsi $v(u^k(x)) = u^k(v(x)) = u^k(P(u)(x)) = P(u)(u^k(x))$.

Ainsi, les endomorphismes v et $P(u)$ sont égaux sur une base de E. On obtient donc que $v = P(u)$. v est un polynôme en u, et cet endomorphisme est entièrement déterminé par l'image du vecteur x.

• On en déduit que l'ensemble $Com(u)$ est égal à $\mathbb{K}[u]$.

On a $E = S_u(x)$. Ainsi, la matrice de u dans la base $B = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une matrice compagnon de taille nxn.

On a vu en cours qu'une matrice compagnon C_Q a pour polynôme caractéristique Q, et pour polynôme minimal Q. Le polynôme minimal de u est donc égal à son polynôme caractéristique, et est de degré n.

On en déduit que $\mathbb{K}[u] = Vect(Id, u, \ldots, u^{n-1})$, et que la famille $(Id, u, \ldots, u^{n-1})$ est une base de ce sous-ev.

Le commutant de u est donc de dimension n.

Autre méthode : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on peut associer l'endomorphisme $P(u) \in \mathbb{K}[u]$. Comme la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, l'application linéaire $P \mapsto P(u)(x) \in E$ est injective.

Donc, l'application $P \mapsto P(u)$ est injective. Ainsi, $\mathbb{K}[u]$ contient un sous-ev de dimension n.

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de u est de degré au plus n. Ainsi, le sous-ev $\mathbb{K}[u]$ est de dimension au plus n.

Donc $\mathbb{K}[u]$ est de dimension n, et $Com(u) = \mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{n-1}[u] = Vect(Id, u, \ldots, u^{n-1})$.