FEUILLE DE TD N° 8

Polynômes d'endomorphismes

16 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit E un ev de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E.
On pose $F_i = S_u(v_i)$ et $P_i(X) = \mu_{u_{F_i}}(X)$.
• Montrer que l'on a $\mu_u = ppcm(P_1, \ldots, P_n)$.
• Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose A_σ la matrice de permutation associée à σ.
On écrit $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_r$ la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.
Déterminer μ_{A_σ}.
Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce polynôme est à racines simples.

Exercice 2.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer μ_A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice B est-elle diagonalisable ?
   Déterminer μ_B. (Indication : Poser $C = B - I$)

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer μ_A.
Montrer que pour toute suite récurrente $(X_n)_n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie $X_{n+1} = AX_n$, la suite $(X_n)_n$ est bornée.

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mu_{J_n(\lambda)}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ avec $u(P)(X) = P(X+1)$.
• Déterminer μ_u. (On pourra étudier $v = u - Id$).
• On se place maintenant sur $(\mathbb{Z}/2Z)_5[X]$, avec $v(P(X)) = P(X+1)$.
Déterminer μ_v.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.

1. Soit $M = \mathrm{Diag}\,(A_1, \ldots, A_r)$ une matrice diagonale par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
   Déterminer $\mu_M(X)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{K})$.
   Montrer que l'on a $ppcm(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_M$ et $\mu_M \mid \chi_A \chi_B$.
   Puis, montrer que l'on a $\mu_M \mid \mu_A \mu_B$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & (*) \\ & \vdots \\ (0) & A_r \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure par blocs, avec $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.
   Montrer que l'on a $\mu_M \mid \Pi_{i=1}^r \mu_{A_i}$.
   Ces deux polynômes sont-ils toujours égaux / toujours distincts ?

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Montrer que v est un polynôme en u.
Déterminer la dimension de $Com(u) = \{w \in \mathcal{L}(E) \text{ tels que } wu = uw\}$.